# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

## HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 2 :: Dezember 1922

:: Heft 6 :: Seite 409 bis 480


## INHALT:






VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE


**Beachten Sie** die Bekanntmachung über die Bezugspreise auf der Beilage vor dem redaktionellen Teil

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

**Bd. 2** **Ende Dezember 1922** **Heft 6**


Inhalt:



# HAUPTAUFSÄTZE

## Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben.[1])


Von **M. LAGALLY** in Dresden.


Seit Dirichlet kennt man den paradoxen Satz, daß eine Kugel in einer vollkommenen, stetig strömenden Flüssigkeit keine Kraft erfährt, also selbst ohne Widerstand in der Flüssigkeit bewegt werden kann; daß sich ein Körper von beliebiger Gestalt ebenso verhält, ist öfter behauptet als bewiesen worden. Der Widerspruch zwischen dem Satz und den in der Natur beobachteten Tatsachen löst sich durch die Erkenntnis, daß die beim Dirichletschen Paradoxon vorausgesetzte, besonders einfache Strömung in der Natur überhaupt nicht vorkommt; daß sich vielmehr hinter dem eingetauchten Körper stets Wirbel ausbilden, deren Existenz für das Auftreten eines Widerstandes von grundlegender Bedeutung ist. Einer der glänzendsten Erfolge dieser Erkenntnis ist die Prandtlsche Tragflächentheorie. Nachdem es schon vorher gelungen war, durch eine geistreiche Umgehung der wesentlichen Schwierigkeit wenigstens den Tragflächen-Auftrieb mathematisch zu erfassen, konnte Prandtl den Widerstand des Tragflügels auf eine »Induktions«-Wirkung des Systems der abgelösten Wirbel zurückführen, das dem Zweck der Theorie entsprechend in einfacher Form eingeführt ist.

Die folgende Untersuchung, auf keine bestimmte praktische Anwendung zugeschnitten, aber trotzdem aus der Erkenntnis der Bedeutung hervorgegangen, welche die in der Flüssigkeit enthaltenen Wirbel für den Strömungsdruck besitzen, beschränkt die Allgemeinheit des Wirbelsystems nicht durch die Bedingungen eines bestimmten Problems, sondern nur durch die Grenzen, welche die mathematischen Schwierigkeiten ziehen. Es ergab sich dabei die Notwendigkeit, aus Gründen der mathematischen Analyse außer dem Auftreten von Wirbeln noch eine weitere physikalisch mögliche Erscheinung zuzulassen, obgleich sie für die Anwendungen bisher noch keine Bedeutung gewonnen zu haben scheint, nämlich das Auftreten von Quellen in der Strömung.

Die in einer Flüssigkeit vorhandenen Quellen und Wirbel sind maßgebend für die in der Flüssigkeit herrschende Bewegung; ihre Verteilung bestimmt die Bewegung auch

[1]) Mit der Berechnung der Kräfte allein beschäftigt sich, unter etwas engeren Voraussetzungen, meine Untersuchung »Ueber den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche«. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wissensch. 1921, S. 209 u. f.

analytisch. Ein besonders einfacher Ausdruck läßt sich für die Geschwindigkeit als Funktion der Quellen- und Wirbelverteilung angeben, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist. Weniger einfach liegen die Verhältnisse, wenn die Flüssigkeit begrenzt ist, d. h. entweder das Innere eines Hohlraumes erfüllt oder durch eingetauchte Körper in ihrer Ausbreitung beschränkt ist; dann übt auch die Gestalt der Grenzfläche einen Einfluß aus, der nur durch Lösung einer Randwertaufgabe bestimmt werden kann.

Die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle im Innern oder an der Grenze einer Flüssigkeit ist nun aber maßgebend für den dort herrschenden Druck. Infolgedessen ergibt sich der gesamte Druck einer strömenden Flüssigkeit auf ihre Begrenzung durch Summierung der lokalen Drucke längs der Begrenzung; und in ähnlicher Weise das Moment des Strömungsdruckes. Mithin erscheint auch der Strömungsdruck und sein Moment als Funktion der Verteilung der in der Flüssigkeit enthaltenen Quellen und Wirbel; von ihnen sind die analytischen Ausdrücke für diese beiden Größen in erster Linie abhändig und nur mittelbar von der Gestalt der Grenze; sie lassen bei Abwesenheit von Quellen und Wirbeln die volle Gültigkeit des verallgemeinerten Dirichletschen Satzes erkennen, und umschließen bei Anwesenheit von Wirbeln die bisherigen Theorien über Fälle des Strömungsdrucks.

**1. Ziel und Voraussetzungen der Untersuchung.** In der Prandtlschen Tragflügeltheorie[1]) lassen sich die Auftriebs- und Widerstandskräfte, welche die Tragfläche erfährt, angeben, sobald die Verteilung der vom Flugzeug abgelösten freien und der die Tragfläche ersetzenden gebundenen Wirbel bekannt ist. Die Gestalt der Tragfläche spielt eine untergeordnete Rolle und braucht ebenso wie das Tragflächenprofil in der ebenen Theorie gar nicht näher bekannt zu sein.

Damit tritt eine Eigenschaft der Strömungen einer idealen Flüssigkeit und der dabei auftretenden Kräfte zutage, die, wie gezeigt werden soll, erheblich allgemeiner ist: Wenn eine stationäre Strömung das Innere einer geschlossenen Fläche erfüllt, so hängt der von der Flüssigkeit auf die Fläche ausgeübte Druck und sein Moment ausschließlich von der Verteilung der Quellen und Wirbel in der Flüssigkeit und von der an ihrem Ort herrschenden Geschwindigkeit ab; von der Gestalt der Begrenzung nicht unmittelbar, sondern nur insofern, als die Verteilung der Geschwindigkeit durch die Begrenzung bedingt ist. Aehnliches gilt, wenn die Flüssigkeit den Außenraum erfüllt, jedoch muß in diesem Fall auch die analytische Fortsetzung der Strömung in den Innenraum bekannt sein.

Die folgende Untersuchung ist von größerer Allgemeinheit, als die Anwendung auf die Tragflügel-Theorie erfordern würde. Die Flüssigkeit soll den Innenraum J oder Außenraum A einer geschlossenen Fläche F erfüllen. Im ersten Fall kann die Fläche ein- oder mehrfach zusammenhängend sein; im letzteren kann sie außerdem in mehrere getrennte Flächen zerfallen. Die Strömung soll stationär sein und — mit gewissen, noch näher zu bestimmenden Einschränkungen — beliebig verteilte Quellen- und Wirbelfelder besitzen, die durch Grenzübergang in diskrete, punkt-, linien- oder flächenförmig verteilte Singularitäten von unendlicher Dichte ausarten können. Zunächst aber sollen sie mit Rücksicht auf die Stetigkeitsbedingungen, die für die Sicherstellung einiger Umformungen von Raum- und Flächenintegralen erforderlich sind, kontinuierlich ausgebreitet angenommen werden.

Die Strömung braucht also kein Geschwindigkeitspotential zu besitzen; die Existenz eines solchen wird wenigstens nicht für die ganze Strömung vorausgesetzt, mithin auch die Gleichheit der Strömungsenergie für alle Stromfäden (der Konstanten in der Bernoullischen Gleichung) für das Innere der Flüssigkeit nicht gefordert[2]). Jedoch soll die Strömung an der Begrenzungsfläche selbst den Charakter einer Potentialströmung haben; mindestens soll das Heranziehen der Singularitäten an die Begrenzung nur unter der Bedingung gestattet sein, daß wenigstens an der Begrenzungsfläche selbst die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \text{konst.} \qquad (1)$$

($p$ Druck, $v$ Geschwindigkeit, $\varrho$ Dichte) für einen festen Wert der Konstanten gesichert ist. Damit ist u. a. an der Begrenzungsfläche das Umfließen scharfer Kanten mit großer Geschwindigkeit unter Entstehung negativen Druckes ausgeschlossen. Die physikalische Bedeutung obiger Forderung ergibt sich folgendermaßen: Der Gradient der linken Seite

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. u. II. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1918 u. 1919.

[2]) Im Gegensatz zu Prandtl.

von (1) ist Null: $\frac{1}{\varrho}\nabla p + {}^1/_2 \nabla v^2 = 0$. Vergleicht man diese Gleichung mit der Eulerschen Gleichung für die stationäre Strömung bei Abwesenheit von Raumkräften[1])

$$\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = 0 \;{}^{2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

so folgt $\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v}$. Nach einer bekannten vektoranalytischen Umformung ist $\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\times \operatorname{curl}\mathfrak{v}$, also

$$\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Außer für wirbelfreie Strömungen gilt somit die Bernoullische Gleichung mit einer für alle Stromlinien gleichen Konstanten auch dann, wenn die Wirbellinien mit den Stromlinien zusammenfallen. Das trifft gerade die an den Hinterkanten der Tragflächen auftretende Erscheinung; die Wirbellinien der sich dort ablösenden Wirbelschicht verlassen die Tragfläche in Richtung der Stromlinien.

**2. Zusammenstellung einiger Umformungen.** Für die folgende Untersuchung werden mehrere Umwandlungen von Flächenintegralen in Raumintegrale, und von Kurvenintegralen in Flächenintegrale verwendet, die ich, um den Gang der Untersuchung nicht durch formale Ueberlegungen unterbrechen zu müssen, eingangs zusammenstelle.

Es sei $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der positiven Normalen der Fläche F, diese soll bei berandeten Flächenstücken mit dem Umlaufssinn eine Rechtsschraube bilden, bei geschlossenen Flächen nach innen gehen; $d\omega$ das Oberflächenelement; $d\mathfrak{o} = \mathfrak{n}\,d\omega$ das orientierte Flächenelement; $d\tau$ das Raumelement; $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor für einen Punkt der Fläche F; $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor für einen Punkt des Randes $C$. Ferner sei $\varphi$ ein Skalar, $\mathfrak{v}$ ein Vektor, $\Phi$ ein Tensor, welche gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen, die für die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes hinreichen. Dann gelten folgende Gleichungen:

a) $\int_J \nabla\cdot\mathfrak{v}\,d\tau = -\int_F \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}$ (Gaußscher Integralsatz),

b) $\int_J \nabla\varphi\,d\tau = -\int_F \varphi\,d\mathfrak{o}$ [3]); also $\int_F d\mathfrak{o} = 0$ für geschlossene Flächen,

c) $\int_J \nabla\cdot\Phi\,d\tau = -\int_F d\mathfrak{o}\cdot\Phi$ [4]),

d) $\int_J \nabla\times\mathfrak{v}\,d\tau = -\int_F d\mathfrak{o}\times\mathfrak{v}$ [5]); also $\int_F d\mathfrak{o}\times\mathfrak{r} = 0$ für geschlossene Flächen,

e) $\int_J \mathfrak{r}\times\nabla\cdot\Phi\,d\tau = -\int_F \mathfrak{r}\times(d\mathfrak{o}\cdot\Phi)$ für symmetrische Tensoren $\Phi$; der Beweis ergibt sich, indem man in c) den Tensor $\Phi$ durch $\mathfrak{r}\times\Phi$ ersetzt.

f) $\int_F (\nabla\times\mathfrak{v})\cdot d\mathfrak{o} = \int_C \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{s}$ (Stokesscher Integralsatz),

g) $\int_F d\mathfrak{o}\times\nabla\varphi = \int_C \varphi\,d\mathfrak{s}$ [6]),

h) $\int_F d\mathfrak{o}\cdot\nabla\times\Phi = \int_C d\mathfrak{s}\cdot\Phi$ [7]).

[1]) Die Prandtlsche Theorie führt Raumkräfte ein und kommt gerade dadurch zum Ziel.

[2]) Bezeichnung der Vektoren nach Gibbs: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ skalares Produkt, $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ Vektorprodukt, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ Gibbssche Dyade (dyadisches Produkt); $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$; $\nabla$ vor einem Skalar: Gradient; $\nabla\cdot$ vor einem Vektor: Divergenz (div); $\nabla\times$ vor einem Vektor: Rotation (curl).

[3]) Gibbs-Wilson, Vector Analysis, S. 256. — [4]) ebenda S. 409. — [5]) ebenda S. 257. — [6]) ebenda S. 255; zuerst bei A. Föppl »Einführung in die Maxwellsche Theorie«.

[7]) Nach dem Stokesschen Integralsatz; die Gleichung h) ergibt sich aus f) in derselben Weise wie c) aus a). Gibbs S. 409.

Ferner sei hier noch eine vektoranalytische Umformung angegeben. Die Identität

$$\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v}\cdot\nabla\,\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\times \operatorname{curl}\mathfrak{v}$$

wurde bereits erwähnt; fügt man hierzu noch den Ausdruck für die Divergenz einer Dyade $\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}$

$$\nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\cdot\nabla\,\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\,\nabla\cdot\mathfrak{v},$$

so folgt

i) $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}$.

**3. Die „innere Aufgabe".** Wenn die Flüssigkeit das Innere von F erfüllt, ergeben sich für die Kraft $\mathfrak{P}$ und ihr Moment $\mathfrak{M}$ folgende Ausdrücke, die nach der Bernoullischen Gleichung (1) die untenstehende Umformung zulassen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\int_F p\,d\mathfrak{o} = \frac{\varrho}{2}\int_F v^2\,d\mathfrak{o} + c\int_F d\mathfrak{o} \\ \mathfrak{M} &= -\int_F \mathfrak{r}\times p\,d\mathfrak{o} = \frac{\varrho}{2}\int_F \mathfrak{r}\times v^2\,d\mathfrak{o} + c\int_F \mathfrak{r}\times d\mathfrak{o} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4);$$

hier ist $c$ eine Konstante. Die beiden letzten Integrale verschwinden nach ($b$) und ($d$); die beiden ersten Summanden lassen sich denselben Gleichungen zufolge in Raumintegrale überführen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\frac{\varrho}{2}\int_J \nabla v^2\,d\tau \\ \mathfrak{M} &= \frac{\varrho}{2}\int_J \nabla\times(v^2\,\mathfrak{r})\,d\tau = -\frac{\varrho}{2}\int_J \mathfrak{r}\times\nabla v^2\,d\tau\ ^{1)}. \end{aligned}\right\}$$

Zufolge der Identität i) wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\varrho\int_J \nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})\,d\tau + \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau, \\ \mathfrak{M} &= -\varrho\int_J \mathfrak{r}\times\nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})\,d\tau + \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau. \end{aligned}\right\}$$

Die in den beiden ersten Summanden auftretenden Integrale können nach c) und e) in Flächenintegrale zurückverwandelt werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varrho\int_F \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau, \\ \mathfrak{M} &= \varrho\int_F \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (5).$$

An der Fläche F ist die Geschwindigkeit tangential; also $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = 0$. Mit dieser Bemerkung ist die »innere Aufgabe« gelöst; für Kraft und Moment ergeben sich die endgültigen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau\ ^{2)}, \\ \mathfrak{M} &= \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

[1] $\nabla\times(v^2\,\mathfrak{r}) = \nabla v^2\times\mathfrak{r} + v^2\,\nabla\times\mathfrak{r}$; der 2. Summand ist Null.

[2] Nach Abschluß der Arbeit kommt mir eine Abhandlung von **Munk** zu Gesicht, in der die erste der Gleichungen (6) ebenfalls abgeleitet ist. Some new aerodynamical relations. National advisory Committer for Aeronautics. Report Nr. 114, Part III, The forces acting on bodies moving in a perfect fluid. Ferner ist inzwischen eine Abhandlung von H. Liebmann erschienen: Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wissensch. 1922 S. 127 u. f., die auch die 2. der Gleichungen (6) enthält; außerdem die Angabe der Zusatzglieder (7) unter der vereinfachenden Annahme, daß die Größe $A_2$ der Gleichung (8) konstant, also Null ist. Liebmann vermeidet die Verwendung der Dyaden.

Diese hängen nur von der Verteilung der Quellen und Wirbel und von den in den Punkten des Quellen- und Wirbelfeldes bestehenden Geschwindigkeiten ab. Allerdings darf, wie schon erwähnt, nicht übersehen werden, daß diese Geschwindigkeiten selbst durch die Gestalt der Oberfläche wesentlich beeinflußt werden.

**4. Die „äußere Aufgabe".** Die Berechnung von Kraft und Moment, welche eine ins Unendliche reichende Strömung auf einen eingetauchten Körper ausübt, kann auf die »innere Aufgabe« zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck betrachtet man von der den ganzen Außenraum A erfüllenden Flüssigkeit, die von innen durch die Fläche F begrenzt ist, zunächst nur den Teil, der das zwischen F und einer Kugel K von großem Radius liegende Gebiet A' erfüllt, und läßt dann den Radius ins Unendliche wachsen. Damit zerfällt in (5) die Kraft $\mathfrak{P}$ in 2 Komponenten $\mathfrak{P}_F$ und $\mathfrak{P}_K$, die an der Fläche F bezw. an der Kugel K angreifen, entsprechendes gilt für $\mathfrak{M}$. Ebenso zerfallen die auf der rechten Seite stehenden Flächenintegrale in je 2 Teile, die über F bezw. K zu erstrecken sind. Da die Kugel K von der Flüssigkeit durchströmt wird, während an F die Richtung der Geschwindigkeit tangential ist, verschwinden die über K genommenen Teile der Flächenintegrale nicht. Zur Ableitung von (5) ist ferner die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung an der ganzen Begrenzung, also auch an K vorausgesetzt. Die Strömung muß also im Unendlichen singularitätenfrei sein, und der Radius der Kugel K von vornherein so groß gewählt werden, daß die Kugel die ganzen Quellen- und Wirbelfelder umschließt; nur Wirbellinien von der Art der an einer Tragfläche abgelösten Wirbel, die zugleich Stromlinien sind, können auch im Unendlichen zugelassen werden, da sie die Bernoullische Gleichung nicht stören. Mit Rücksicht auf die analytische Behandlung, für die die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials im Unendlichen erwünscht ist, sollen jedoch diese Wirbellinien innerhalb der Kugel geschlossen gedacht werden und das Schlußstück gleichzeitig mit der Kugel ins Unendliche rücken.

Somit geht also (5) (6) über in

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_F &= -\mathfrak{P}_K + \varrho\int\limits_K \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o} + \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M}_F &= -\mathfrak{M}_K + \varrho\int\limits_K \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o} + \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Nach (4) ist

$$\mathfrak{P}_K = \frac{\varrho}{2}\int\limits_K v^2\,d\,\mathfrak{o}; \qquad \mathfrak{M}_K = \frac{\varrho}{2}\int\limits_K \mathfrak{r}\times v^2\,d\,\mathfrak{o};$$

mithin ist

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_F &= \varrho\int\limits_K (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o} - {}^1/_2\,v^2\,d\,\mathfrak{o}) + \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M}_F &= \varrho\int\limits_K \mathfrak{r}\times(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o} - {}^1/_2\,v^2\,d\,\mathfrak{o}) + \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int\limits_{A'} \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad (7').$$

**5. Die Zusatzglieder bei der „äußeren Aufgabe".** Von der Lösung der inneren Aufgabe unterscheiden sich die Gleichungen (7') durch das Auftreten zweier Zusatzglieder, die jetzt zu berechnen sind. Nach den getroffenen Vereinbarungen besitzt die Strömung im Unendlichen höchstens eine endliche Geschwindigkeit (in ihrer Richtung soll die positive $X$-Achse angenommen werden) und ein Geschwindigkeitspotential $\varphi$, das in eine nach fallenden Potenzen des Absolutwertes $r$ des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann:

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \dots \quad (8).$$

Von den auf der rechten Seite auftretenden Kugelfunktionen hat die erste $\frac{A_1}{r}$ einen konstanten Zähler. Die folgenden können aus der fundamentalen Lösung $\frac{1}{r}$ der Laplaceschen Gleichung durch einen Differentiationsprozeß abgeleitet werden. Bezeichnet man mit $\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2} \dots \frac{\partial}{\partial s_k}$ die Differentiationen nach k verschiedenen Richtungen

und mit $\mathfrak{C}_k$ eine Konstante, so läßt sich die allgemeinste harmonische Kugelfunktion (—k)ter Ordnung in der Form darstellen:

$$\frac{A_k}{r_k} = \mathfrak{C}_k \frac{\partial^k}{\partial s_1\, \partial s_2 \ldots \partial s_k} \frac{1}{r}$$

oder auch

$$\frac{A_k}{r_k} = \mathfrak{C}_k (\mathfrak{e}_1 \cdot \nabla)(\mathfrak{e}_2 \cdot \nabla) \ldots (\mathfrak{e}_k \cdot \nabla) \frac{1}{r},$$

wenn $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_k$ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen bedeuten. Diese Darstellung ist hydrodynamisch wichtig, da die (—k)te Kugelfunktion das Feld einer Quelle k. Ordnung im Anfangspunkt ergibt[1]).

Für unseren Zweck wurden nur Glieder bis zur Ordnung —2 gebraucht; dann ist

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A}{r} + (\mathfrak{C} \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \ldots \qquad (9),$$

wo $A$ eine skalare, $\mathfrak{C}$ eine vektorielle Konstante bedeutet. Dann ist die Geschwindigkeit bis auf die Glieder zur Ordnung —3:

$$\mathfrak{v} = \nabla \varphi = \mathfrak{i} v_\infty + A \nabla \frac{1}{r} + (\mathfrak{C} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \ldots \qquad (9').$$

Führt man für die Kugel den Einheitsvektor in Richtung der inneren Normalen ein,

$$\mathfrak{n} = -\frac{\mathfrak{r}}{r},$$

so ist

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \frac{\mathfrak{n}}{r^2},$$

$$(\mathfrak{C} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{-\mathfrak{C} + 3\, \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{n}\, \mathfrak{n}}{r^3}.$$

Damit ergeben sich die Fundamentalreihen für das Geschwindigkeitspotential und die Geschwindigkeit:

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A}{r} + \frac{\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{n}}{r^2} + \ldots \qquad (10),$$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\, v_\infty + \frac{A\, \mathfrak{n}}{r^2} + \frac{-\mathfrak{C} + 3\, \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{n}\, \mathfrak{n}}{r^3} + \ldots \qquad (10').$$

Mit Hilfe dieser Reihen lassen sich die in (7) aufgetretenen Zusatzintegrale berechnen. Hierzu ist noch notwendig, in das orientierte Flächenelement $d\, \mathfrak{o}$ den zugehörigen räumlichen Zentriwinkel $d\, \varepsilon$ einzuführen; es ist

$$d\, \omega = r^2\, d\, \varepsilon; \quad \text{also } d\, \mathfrak{o} = \mathfrak{n}\, r^2\, d\, \varepsilon.$$

Dann ergeben sich die über die Kugelfläche zu integrierenden Differentiale durch eine einfache Zwischenrechnung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}\, \mathfrak{v} \cdot d\, \mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\, d\, \mathfrak{o} &= \Big[ (\mathfrak{i}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n} - {}^1\!/_2\, \mathfrak{n})\, v_\infty{}^2\, r^2 + \mathfrak{i}\, A\, v_\infty \\ &\quad + (2\, \mathfrak{i}\, \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{n} - \mathfrak{C}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n} + \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{C}\, \mathfrak{n}) \frac{v_\infty}{r} + \ldots \Big]\, d\, \varepsilon, \\ \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}\, \mathfrak{v} \cdot d\, \mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\, d\, \mathfrak{o}) &= -\,[\mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, v_\infty{}^2\, r^3 + \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, A\, v_\infty\, r \\ &\quad + (2\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{n} - \mathfrak{n} \times \mathfrak{C}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n})\, v_\infty + \ldots]\, d\, \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Bei der Integration dieser Reihen über die Kugel verschwinden für $r \to \infty$ sämtliche Glieder mit negativen Potenzen von $r$. Man kann sich also vor dem Grenzübergang auf die Integration derjenigen Glieder beschränken, in denen der Exponent von $r$ positiv oder Null ist. Dabei treten folgende Integrale über die Einheitskugel auf:

$$\int d\, \varepsilon = 4\, \pi,$$

$$\int \mathfrak{n}\, d\, \varepsilon = 0 \; [\text{nach b})],$$

$$\int \mathfrak{i}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\, \varepsilon = \mathfrak{i}\, \mathfrak{i} \cdot \int \mathfrak{n}\, d\, \varepsilon = 0,$$

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, d\, \varepsilon = -\, \mathfrak{i} \times \int \mathfrak{n}\, d\, \varepsilon = 0,$$

[1]) Vergl. z. B. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 127.

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{G}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = -\mathfrak{G} \times \int \mathfrak{n} \cos(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n})\, d\varepsilon$$

$$= \mathfrak{G} \times \int x\, d\mathfrak{o} = -\mathfrak{G} \times \int \nabla x\, d\tau \text{ [nach b)]} = -\frac{4}{3}\pi\, \mathfrak{G} \times \mathfrak{i},$$

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = -\frac{4}{3}\pi\, \mathfrak{i} \times \mathfrak{G},$$

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\, \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = 0.$$

Damit werden die Grenzwerte der Zusatzintegrale für $r \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \int_{K_\infty} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\, d\mathfrak{o}) &= 4\pi\, \mathfrak{i}\, A v_\infty, \\ \int_{K_\infty} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\, d\mathfrak{o}) &= 4\pi\, \mathfrak{i} \times \mathfrak{G}\, v_\infty \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Diese Ausdrücke sind in (7) einzuführen; dabei kann man sich auch von dem eingeführten Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ wieder frei machen, indem man $\mathfrak{i}\, v_\infty = \mathfrak{v}_\infty$ setzt. Dann ergibt sich folgende vorläufige Lösung der äußeren Aufgabe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_F &= 4\pi\varrho A\, \mathfrak{v}_\infty + \varrho \int_A \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau, \\ \mathfrak{M}_F &= 4\pi\varrho\, \mathfrak{v}_\infty \times \mathfrak{G} + \varrho \int_A \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13).$$

Es hängen also in diesem Fall Druck und Moment außer von den bei der »inneren Aufgabe« vorkommenden Größen noch von der Geschwindigkeit im Unendlichen und von einer skalaren und einer vektoriellen Konstanten ab, welche in den beiden ersten Gliedern der Reihenentwicklung des Geschwindigkeitspotentials oder der Geschwindigkeit im Unendlichen auftreten.

Wenn die Strömung im Außenraum quellen- und wirbelfrei ist, jedoch im Unendlichen eine endliche Geschwindigkeit besitzt, so reduzieren sich Kraft und Moment auf die Zusatzglieder. Es ist jedoch bekannt und kommt auch im folgenden noch zur Sprache, daß in einer singularitätenfreien Strömung die Konstante $A$ verschwindet; von $\mathfrak{G}$ gilt nicht das gleiche. Also übt eine reine Translationsströmung auf einen eingetauchten Körper zwar keine Kraft, aber im allgemeinen ein Drehmoment aus. Es ist leicht einzusehen, daß für veränderliche Richtung von $\mathfrak{v}_\infty$ der Zusammenhang von $\mathfrak{v}_\infty$ und $\mathfrak{G}$ durch eine lineare Vektorfunktion gegeben ist; infolgedessen gibt es für jeden Körper 3 »Anstellrichtungen«, für die auch das Drehmoment verschwindet.

**6. Die zur „äußeren Aufgabe" gehörige Randwertaufgabe.** Auch die beiden Konstanten $A$ und $\mathfrak{G}$, die in den Zusatzgliedern auftreten, lassen sich durch div $\mathfrak{v}$ und curl $\mathfrak{v}$ ausdrücken. Hierzu hat man die Strömung aus den vorgegebenen Quellen- und Wirbelfeldern synthetisch aufzubauen; dazu ist allerdings notwendig, daß die Verteilung dieser Felder nicht nur im Außenraum A bekannt ist, sondern daß auch die feste Begrenzungsfläche F durch eine Verteilung von Singularitäten ersetzt ist. Diese Forderung kann auf verschiedene Weise befriedigt werden. Z. B. kann man auf F Quellen und Doppelquellen oder auch nur Doppelquellen oder Wirbellinien so verteilen, daß sie zusammen mit den gegebenen Singularitäten und der gegebenen Geschwindigkeit im Unendlichen eine Strömung erzeugen, welche an F tangential ist, und im Innenraum harmonisch ist, ja sogar ruhen kann[1]. Dazu ist allerdings, wenn die Strömung im Außenraum nicht von vornherein bekannt ist, die Lösung einer zweiten Randwertaufgabe erforderlich. Ein anderer Weg besteht darin, die Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Außenraum, die im Außenraum harmonisch ist, in den Innenraum hinein analytisch fortzusetzen; dort liegen ihre Singularitäten als verallgemeinerte Thomsonsche Bilder der gegebenen Singularitäten der Strömung im Außenraum. Wenn allerdings diese Funktion, wie es die Regel sein wird, im Innern verzweigt und mehrwertig ist, führt der

[1] Z. B. Lamb, Hydrodynamik, S. 72–76, 252–254.

Wunsch, mit nur einer Ueberdeckung des Raumes auszukommen, auf den ersten Weg zurück: eine geeignete Verteilung von Quellen und Wirbeln auf den Uebergangsflächen des Riemannschen Raumes ersetzt die aus den anderen Ueberdeckungen kommende Strömung.

Die erwähnte Verwendung des Prinzips der Thomsonschen Bilder bietet auch eine Möglichkeit, von der indessen weiterhin kein Gebrauch gemacht werden soll, die äußere Aufgabe vollständig auf die innere zurückzuführen[1]). Innen- und Außenraum sind von 2 Strömungen erfüllt, die beide tangential zur Begrenzung verlaufen und dort stetig ineinander übergehen. Es werden sich also Druck und Moment der inneren Strömung von den entsprechenden Größen der äußeren Strömung nur im Vorzeichen unterscheiden. Das ist auch aus der analytischen Behandlung zu erkennen.

Nach (6), (7) ist der Innen- bezw. Außendruck:

$$\mathfrak{P}_{F,J} = \varrho \int_J \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int_J \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} \, d\tau,$$

$$\mathfrak{P}_{F,A} = -\mathfrak{P}_K + \varrho \int_{A'} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} \, d\tau.$$

Der Druck $\mathfrak{P}_K$ kann aber jetzt aufgefaßt werden als Innendruck der die ganze Kugel K, also J + A′ erfüllenden, an F stetigen Strömung; also ist

$$\mathfrak{P}_K = \varrho \int_{J+A'} \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int_{J+A'} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} \, d\tau.$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt in der Tat

$$\mathfrak{P}_{F,J} = -\mathfrak{P}_{F,A}; \quad \text{ebenso ist} \quad \mathfrak{M}_{F,J} = -\mathfrak{M}_{F,A}.$$

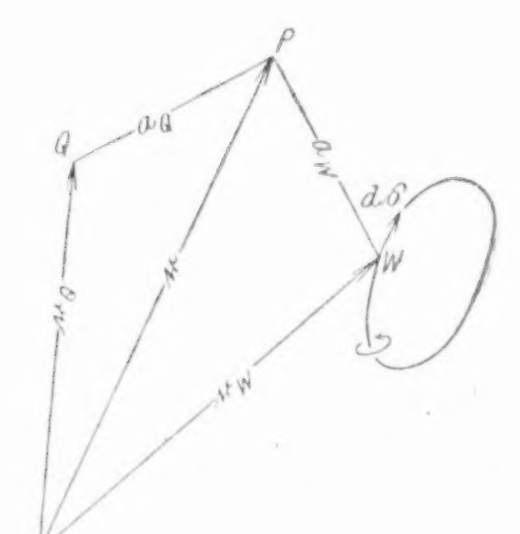



Abb. 1

**7. Synthetischer Aufbau der Strömung; Berechnung von $A$ und $\mathfrak{S}$.** Ein synthetischer Ausdruck für die Geschwindigkeit in einem Punkt P des Außenraumes ergibt sich aus der bekannten Formel, welche einen Vektor in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Teil zerlegt. Daraus lassen sich dann die Konstanten $A$ und $\mathfrak{S}$ berechnen. Für diese Untersuchung ist zuvor die Bezeichnung der Ortsvektoren zu verschärfen. Es sei (Abb. 1)

$\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, welcher vom Anfangspunkt O nach dem Aufpunkt P führt, in welchem die Geschwindigkeit betrachtet wird,

$\mathfrak{r}_Q$ bezw. $\mathfrak{r}_W$ der Ortsvektor nach einem Quellpunkt Q bezw. einem Punkt W einer Wirbellinie,

$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r}_W$ das gerichtete Linienelement einer Wirbellinie,

$a_Q$ bezw. $a_W$ die Entfernung des Aufpunktes P von einem Quellpunkt Q bezw. einem Punkt W einer Wirbellinie.

Ferner soll das Zeichen $\nabla$ der vektoriellen Differentiation, bezogen auf eine Funktion der Koordinaten zweier Punkte, als Index die Bezeichnung desjenigen Punktes erhalten, in dem die Differentiation ausgeführt wird; nur die Differentiation im Aufpunkt P soll mit $\nabla$ ohne Index bezeichnet werden. Dabei ist zu bemerken, daß entsprechende Differentiationen einer Funktion einer Strecke in den beiden Endpunkten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Also ist z. B.

$$\nabla_P \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} = -\nabla_O \frac{1}{r}; \quad \nabla_P \frac{1}{a_Q} = \nabla \frac{1}{a_Q} = -\nabla_Q \frac{1}{a_Q}.$$

Bei gegebenem Quellen- und Wirbelfeld läßt sich die Geschwindigkeit in einem Punkt des Feldes in folgender Weise darstellen:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_\infty - \operatorname{grad} \int_R \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{4\pi a_Q} d\tau + \operatorname{curl} \int_R \frac{\operatorname{curl} \mathfrak{v}}{4\pi a_W} d\tau \quad . \; . \; . \; . \quad (14),$$

[1]) Vergl. die Behandlung der Aufgabe bei Prandtl; insbes. I. Mitteilung Gleichung (8) S. 13.

wobei die Integrale über den ganzen Raum $R = J + A$ zu erstrecken sind. Diese Darstellung von $\mathfrak{v}$ setzt voraus, daß $\mathfrak{v}$ von der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_\infty$ abgesehen im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Da dies im Strömungsfeld eines geradlinigen Wirbels nicht der Fall ist, sind ins Unendliche laufende Wirbellinien im allgemeinen von der Betrachtung ausgeschlossen. Nur bei parallelen Wirbelfäden von endlichem Abstand und entgegengesetzt gleicher Zirkulation, wie sie etwa von der rückwärtigen Kante einer Tragfläche ausgehen, ist eine hinreichend starke Abnahme der Geschwindigkeit im Unendlichen gewährleistet, wenn man sie wie in § 4 im Endlichen schließt.

Der Ausdruck (14) für $\mathfrak{v}$ oder das zugehörige Geschwindigkeitspotential ist jetzt zur Bestimmung von $A$ und $\mathfrak{S}$ nach fallenden Potenzen von $r$ zu entwickeln. Der von dem Quellenfeld herrührende wirbelfreie Teil der Strömung

$$\mathfrak{v}_Q = -\operatorname{grad}\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi a_Q}\,d\tau$$

besitzt ein Geschwindigkeitspotential

$$\varphi_Q = -\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi a_Q}\,d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15).$$

Für $\frac{1}{a_Q}$ erhält man die Taylorsche Entwicklung

$$\frac{1}{a_Q} = \frac{1}{r} + \left(\mathfrak{r}_Q \cdot \underset{O}{\nabla}\right)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}\left(\mathfrak{r}_Q \cdot \underset{O}{\nabla}\right)^2 \frac{1}{r} + \ldots,$$

wobei der Aufpunkt P festgehalten wird und die Differentiation im Anfangspunkt O auszuführen ist. Hält man statt dessen den Anfangspunkt fest und differentiiert im Aufpunkt, so ergibt sich die Entwicklung von $\frac{1}{a_Q}$ nach Legendreschen Kugelfunktionen in der Form

$$\frac{1}{a_Q} = \frac{1}{r} - (\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}(\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \ldots \ldots \ldots \ldots (16).$$

Damit wird

$$\varphi_Q = -\frac{1}{r}\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi}\,d\tau + \int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi}\,\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla \frac{1}{r}\,d\tau - \ldots$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau + \frac{\mathfrak{r}}{4\pi r^2}\cdot\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \ldots \ldots \ldots (17).$$

Der Vergleich mit (9) oder (10) läßt sofort die Beiträge $A_Q$ und $\mathfrak{S}_Q$ erkennen, welche das Quellenfeld zu $A$ und $\mathfrak{S}$ liefert:

$$A_Q = -\frac{1}{4\pi}\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau, \qquad \mathfrak{S}_Q = \frac{1}{4\pi}\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau$$

Auch der von dem Wirbelfeld herrührende quellenfreie Teil der Strömung

$$\mathfrak{v}_W = \operatorname{curl}\int_R \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{v}}{4\pi a_W}\,d\tau$$

besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen ein Potential im Unendlichen. Setzt man $d\tau = d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s}$, wo $d\mathfrak{f}$ der orientierte Querschnitt einer Wirbelröhre, $d\mathfrak{s}$ das gerichtete Linienelement längs einer Wirbellinie L ist, und berücksichtigt, daß $\operatorname{curl}\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ parallel sind, so ist

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\,d\mathfrak{s}.$$

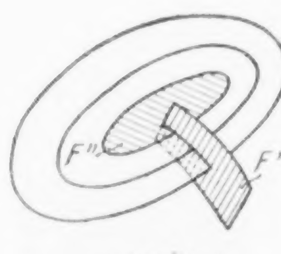


Abb. 2

Wenn man also durch das ganze Wirbelfeld eine (nicht geschlossene) Fläche F' (Abb. 2) legt, welche jede Wirbellinie einmal schneidet, so ist

$$\int_R \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{v}}{4\pi a_W}\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_{F'}\left(\operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\int_L \frac{d\mathfrak{s}}{a_W}\right).$$

Das Randintegral läßt sich nach dem Föpplschen Integralsatz (g) in ein Flächenintegral verwandeln über eine beliebige Fläche F'', die die Wirbellinie L zum Rand hat (unter Erweiterung des Sinnes der Bezeichnung $a_W$):

$$\int_L \frac{d\mathfrak{s}}{a_W} = \int_{F''} d\mathfrak{o} \times \nabla_W \frac{1}{a_W} .$$

Ferner ist nach dem Stokesschen Integralsatz (f)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = d\Gamma$$

die Zirkulation um die Wirbelröhre vom Querschnitt $d\mathfrak{f}$.

Nun läßt sich wieder die Differentiation von $\frac{1}{a_W}$ in einem Punkt von F'' unter Aenderung des Vorzeichens durch Differentiation in P ersetzen; dann wird

$$\mathfrak{v}_W = -\nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \times \nabla \frac{1}{a_W} = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \times \nabla \times \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} .$$

Nach einer bekannten Umformung ist

$$\nabla \times \nabla \times \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} = \nabla \nabla \cdot \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} - \nabla \cdot \nabla \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} .$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{1}{a_W}$ außerhalb des Wirbelgebietes der Laplaceschen Gleichung genügt, so folgt

$$\mathfrak{v}_W = \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \frac{1}{a_W} \cdot d\mathfrak{o} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Damit ist der von dem Wirbelfeld herrührende Teil der Geschwindigkeit als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials

$$\varphi_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \frac{1}{a_W} \cdot d\mathfrak{o} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

dargestellt, das einer zusammengesetzten räumlichen Verteilung von Doppelquellen entspricht. Entwickelt man wie in (16) $\frac{1}{a_W}$ nach Potenzen von $\frac{1}{r}$, so beginnt die Reihe für $\varphi_W$ mit einem Glied 2. Ordnung:

$$\varphi_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20').$$

Weitere Glieder sind für unseren Zweck nicht notwendig; denn der Vergleich mit (9) läßt bereits die Beiträge $A_W$ und $\mathfrak{G}_W$ erkennen, die das Wirbelfeld zu $A$ und $\mathfrak{G}$ liefert:

$$A_W = 0, \quad \mathfrak{G}_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Um den letzteren Ausdruck umzuformen, so daß er wieder in der Gestalt eines Raumintegrals erscheint, bemerkt man, daß die Fläche $\mathfrak{F}'' = \int_{F''} d\mathfrak{o}$ zusammen mit dem Kegel, der ihre Berandung $C$ mit dem Anfangspunkt verbindet, eine geschlossene Fläche bildet, die die orientierte Oberfläche Null besitzt. Also ist, wenn man auf dem Kegel die Normalenrichtung umkehrt, $\mathfrak{F}''$ der orientierten Oberfläche des Kegels gleich:

$$\int_{F''} d\mathfrak{o} = {}^1/_2 \int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s}$$

Führt man jetzt wieder $\operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}$ für $d\Gamma$ ein und berücksichtigt den Parallelismus von $d\mathfrak{s}$ und $\operatorname{curl} \mathfrak{v}$, so folgt für $\mathfrak{G}_W$ der Wert:

$$\mathfrak{G}_W = \frac{1}{8\pi} \int_{F'} \operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} \int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s} = \frac{1}{8\pi} \int_R \mathfrak{r}_W \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau \quad \ldots \quad (21').$$

Durch Zusammenfassung von (18) und (21), (21') ergeben sich folgende synthetische Werte von $A$ und $\mathfrak{C}$:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{4\pi}\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \frac{1}{8\pi}\int_R \mathfrak{r}_W \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau \quad . \quad (22).$$

Da in den weiteren Entwicklungen der Aufpunkt P zunächst nicht mehr vorkommt, sind Verwechslungen nicht zu befürchten, wenn von nun an unter Weglassung der Indices $\mathfrak{r}$ für $\mathfrak{r}_Q$ und $\mathfrak{r}_W$ gesetzt wird.

**8. Lösung der äußeren Aufgabe.** Mit $A$ und $\mathfrak{C}$ sind auch die Zusatzglieder in (13) bestimmt, nämlich

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varrho A\mathfrak{v}_\infty &= -\varrho\mathfrak{v}_\infty\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau \\ 4\pi\varrho\mathfrak{v}_\infty\times\mathfrak{C} &= \varrho\mathfrak{v}_\infty\times\int_R \mathfrak{r}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + {}^1/_2\,\varrho\mathfrak{v}_\infty\times\int_R \mathfrak{r}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad (23).$$

Der 2. Summand des letzteren Ausdruckes läßt noch eine Umformung zu, die in formaler Hinsicht von Wichtigkeit ist. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes bestätigt man folgende Identität:

$$\mathfrak{v}_\infty\times[\mathfrak{r}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}] - 2\,\mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}_\infty\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}] = \mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{v}) + \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot\mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{v}).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Raumelement $d\tau = d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s}$ einer Wirbelröhre von der Zirkulation $\gamma = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}$, so läßt sich die rechte Seite in die Form eines vollständigen Differentials einer einwertigen Funktion bringen:

$$\begin{aligned}[&\mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{v}) + \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot\mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{v})]\, d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s} \\ &= [\mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot d\mathfrak{s}) + d\mathfrak{s}\,(\mathfrak{v}_\infty\cdot\mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{s})]\, d\mathfrak{f}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{v} = \gamma\, d\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}_\infty\cdot\mathfrak{r} - \mathfrak{v}_\infty\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}];\end{aligned}$$

infolgedessen besitzt das Integral über eine geschlossene Wirbelröhre und also auch über den ganzen Raum den Wert Null. Also ist auch

$$\int_R \mathfrak{v}_\infty\times[\mathfrak{r}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\, d\tau - 2\int_R \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}_\infty\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\, d\tau = 0.$$

Demnach kann das 2. Zusatzglied in folgende endgültige Form gebracht werden:

$$4\pi\varrho\mathfrak{v}_\infty\times\mathfrak{C} = \varrho\mathfrak{v}_\infty\times\int_R \mathfrak{r}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_R \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}_\infty\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\, d\tau \quad . \quad . \quad (23').$$

Jetzt ergibt sich die Lösung der äußeren Aufgabe in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\varrho\int_R \mathfrak{v}_\infty\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_A \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int_A \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\, d\tau \\ \mathfrak{M} &= -\varrho\int_R \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}_\infty\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \varrho\int_A \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau \\ &\quad + \varrho\int_R \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}_\infty\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\, d\tau - \varrho\int_A \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Bemerkenswert ist für die formale Aehnlichkeit der Zusatzglieder mit den der Lösung der inneren Aufgabe entsprechenden Termen; sie geben die Lösung für das Innere der ins Unendliche wachsenden Kugel. Für $\mathfrak{v}_\infty = 0$ verschwinden sie; in diesem Fall unterscheidet sich die Lösung der äußeren Aufgabe nicht von der der inneren.

**9. Diskrete Singularitäten.** Wenn statt der Quellen- und Wirbelfelder nur diskrete ein- oder mehrfache Quellen und einzelne Wirbelfäden auftreten, so vereinfachen sich die in den Ausdrücken für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ auftretenden Integrale. Da nämlich überall außer in den singulären Punkten $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ und $\operatorname{curl}\mathfrak{v}$ verschwindet und $\mathfrak{v}$ endlich bleibt, genügt es die Integrale statt über die ganzen Gebiete J, A, R über beliebig kleine Teilgebiete zu nehmen, welche die Singularitäten enthalten. Man wird also die Quellpunkte durch Kugeln, die Wirbellinien durch Röhrenflächen einschließen, deren Radius gegen Null abnehmen soll.

Die Werte von $A$ und $\mathfrak{S}$ ergeben sich, wenn man die Strömung synthetisch aufbaut. Das Geschwindigkeitspotential einer einfachen Quelle Q von der Ergiebigkeit $e$ ist

$$\varphi_Q = \frac{-e}{4\pi a_Q} = \frac{-e}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - (\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)\frac{1}{r} + \ldots\right] \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Daraus liest man die Beiträge ab, die die Quelle zu $A$ und $\mathfrak{S}$ liefert:

$$A_Q = -\frac{e}{4\pi}; \quad \mathfrak{S}_Q = \frac{e}{4\pi}\mathfrak{r}_Q \quad \ldots \ldots \quad (26).$$

Das Geschwindigkeitspotential einer Doppelquelle D ergibt sich aus dem der einfachen Quelle durch einen Grenzübergang

$$\varphi_D = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t} \cdot \nabla \frac{1}{a_D} = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (27).$$

Hier bedeutet $\mathfrak{t}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse der Strömung und im Sinn der positiven Geschwindigkeit; $m$ das Moment der Doppelquelle, d. h. den Grenzwert des Produkts aus dem Abstand der Einzelquellen und ihrer Ergiebigkeit. Die Reihenentwicklung beginnt mit einem Glied 2. Ordnung; also sind die Beiträge zu $A$ und $\mathfrak{S}$:

$$A_D = 0; \quad \mathfrak{S}_D = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t} \quad \ldots \ldots \quad (28).$$

Quellen höherer Ordnung liefern weder zu $A$ noch zu $\mathfrak{S}$ einen Beitrag. Das Geschwindigkeitspotential eines geschlossenen Wirbelfadens von der Zirkulation $\Gamma$ ist nach (20):

$$\varphi_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_F \nabla \frac{1}{a_W} \cdot d\mathfrak{o} = \int_F \frac{\Gamma\, do}{4\pi}\mathfrak{n} \cdot \nabla \frac{1}{a_W} \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

Damit ist der Wirbelfaden durch eine flächenhafte Verteilung von Doppelquellen ersetzt, deren Moment die Flächendichte $\Gamma$ besitzt und deren Achse in die Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ einer Fläche F fällt, deren Begrenzung $C$ in den Wirbelfaden fällt. Die Reihenentwicklung beginnt mit einem Glied 2. Ordnung:

$$\varphi_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_F d\mathfrak{o} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \ldots = \frac{\Gamma}{4\pi}\mathfrak{F} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (29').$$

Also liefert der Wirbelfaden zu $A$ und $\mathfrak{S}$ die Beiträge

$$A_W = 0; \quad \mathfrak{S}_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\mathfrak{F} = \frac{\Gamma}{8\pi}\int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s} \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Aus (26), (28), (30) lassen sich die synthetischen Werte zusammensetzen, die $A$ und $\mathfrak{S}$ in einem Strömungsfeld annehmen, das im ganzen Raum R nur diskrete Singularitäten enthält:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\sum_R e, \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_R e\,\mathfrak{r} + \sum_R m\,\mathfrak{t} + \sum_R \Gamma\,\mathfrak{F}\right] \quad \ldots \quad (31).$$

Zu $A$ ist zu bemerken, daß es, wie übrigens auch in (22), gleichgültig ist, ob die Summation über den ganzen Raum R oder nur über den Außenraum A erstreckt wird, da die Summe der Ergiebigkeiten der im Innenraum J gelegenen Quellen von selbst Null ist. Mit $A$ und $\mathfrak{S}$ sind auch die Zusatzglieder bestimmt.

**10. Bestimmung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$.** Beim Auftreten diskreter Singularitäten sind noch folgende in (24) vorkommende Integrale umzuformen:

$$\left.\begin{array}{ll} J_1 = \int \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau; & J_3 = \int \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\,d\tau; \\ J_2 = \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau; & J_4 = \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}]\,d\tau \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (32).$$

Macht man einen Quellpunkt mit der Ergiebigkeit $e$ zum Mittelpunkt einer Kugel $K_0$ vom Radius $\delta$, denkt sich dann den ganzen Innenraum von $K_0$ durch ein kontinuierliches Quellenfeld von konstanter Divergenz erfüllt, dessen Gesamtergiebigkeit $e$ ist, so besitzt diese Quellenverteilung im Außenraum von $K_0$ dasselbe Feld wie der Quellpunkt. Dann ist nach dem Gaußschen Integralsatz (a)

$$e = -\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \int \mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau = {}^4/_3\,\delta^3\,\pi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}.$$

Infolgedessen wird

$$J_1 = \frac{3e}{4\,\delta^3\,\pi}\int \mathfrak{v}\,d\tau; \qquad J_2 = \frac{3e}{4\,\delta^3\,\pi}\int \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,d\tau.$$

Um diese beiden Integrale zu berechnen, zerlegt man $\mathfrak{v}$ in eine Summe

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*,$$

deren erster Summand $\mathfrak{v}_0$ von dem im Innern der Kugel selbst gelegenen Quellenfeld und deren zweiter Summand $\mathfrak{v}^*$ von den übrigen Singularitäten und von $\mathfrak{v}_\infty$ herrührt. Aus Symmetriegründen verschwinden die Teilintegrale für $\mathfrak{v}_0$; also wird

$$J_1 = \frac{3e}{4\,\delta^3\,\pi}\int \mathfrak{v}^*\,d\tau; \qquad J_2 = \frac{3e}{4\,\delta^3\,\pi}\int \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}^*\,d\tau.$$

Nun kann man $\mathfrak{v}^*$ im Mittelpunkt von $K_0$ in eine Reihe entwickeln:

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{v}_M{}^* + \mathfrak{d}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}_M{}^* + \ldots,$$

wo $\mathfrak{d}$ ein Ortsvektor ist, dessen Absolutwert bei der Integration $\delta$ nicht übersteigt. Bei gliedweiser Integration erscheinen auch $J_1$ und $J_2$ in der Form von Potenzreihen in $\delta$, die mit einem konstanten Glied beginnen. Dieses erste Glied bleibt beim Grenzübergang $\delta \to 0$ allein stehen; also ist (unter Weglassung des Index M beim Grenzübergang)

$$J_1 = \frac{3e}{4\,\delta^3\,\pi}\,\mathfrak{v}_M{}^*\int d\tau = e\,\mathfrak{v}^*, \quad J_2 = e\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}^* \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Auch für mehrfache Quellen verschwinden $J_1$ und $J_2$ nicht; so findet man für eine Doppelquelle[1])

$$J_1' = m\,\mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^*, \quad J_2' = m\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^* + m\,\mathfrak{t}\times\mathfrak{v}^* \quad \ldots \quad (33').$$

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Berechnung von $J_3$ und $J_4$. Ein Wirbelfaden von der Zirkulation $\Gamma$ wird ersetzt durch eine dünne Wirbelröhre von derselben Zirkulation

$$\int \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \Gamma.$$

Dann ist wegen des Parallelismus von $d\mathfrak{s}$ und $\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}$

$$J_3 = \int \mathfrak{v}\times\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\,d\tau = \int \mathfrak{v}\times d\mathfrak{s}\,d\Gamma.$$

Setzt man wieder wie oben $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*$, so entsteht eine Schwierigkeit, die auch bei anderen Untersuchungen über Wirbelbewegung auftritt: Man kann wohl an jeder beliebigen Stelle den Querschnitt der Wirbelröhre kreisförmig wählen und die Wirbelstärke gleichmäßig über die Kreisfläche verteilen; dann verschwindet an diesem Querschnitt das Integral $\int \mathfrak{v}_0\,d\Gamma$ aus Symmetriegründen. Aber man kann eine derartige Verteilung nicht längs der ganzen Röhre erreichen. Trotzdem verschwindet obiges Integral für jeden Querschnitt. Denkt man sich nämlich die Röhre in Teilröhren von gleicher Zirkulation $d\Gamma$ zerlegt, was längs der ganzen Röhre möglich ist, so bringen an jedem Querschnitt 2 beliebig herausgegriffene Teilquerschnitte jeder am Ort des andern entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten hervor. Mithin ist

$$\int \mathfrak{v}_0\times d\mathfrak{s}\,d\Gamma = 0.$$

Wenn man jetzt im 2. Summanden $\mathfrak{v}^*$ wie oben an einer Stelle des Querschnittes in eine Reihe entwickelt, so verschwinden beim Grenzübergang in $J_3$ alle Glieder mit Ausnahme des ersten; also wird

$$J_3 = \Gamma\int \mathfrak{v}^*\times d\mathfrak{s} \quad \ldots \ldots \quad (34);$$

eine analoge Betrachtung ergibt

$$J_4 = \Gamma\int \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}^*\times d\mathfrak{s}] \quad \ldots \ldots \quad (34\,\mathrm{a}).$$

Somit erhält man für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$, wenn die Strömung im ganzen Raum nur diskrete einfache Quellen, Doppelquellen und Wirbellinien enthält, folgende Ausdrücke:

[1]) Vergl. die S. 409 unter (1) zitierte Abhandlung S. 218.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\varrho \sum_{\mathrm{R}} e\,\mathfrak{v}_\infty + \varrho \sum_{\mathrm{A}} e\,\mathfrak{v}^* + \varrho \sum_{\mathrm{A}} m\,\mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^* - \varrho \sum_{\mathrm{A}} \Gamma \int \mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s} \\ \mathfrak{M} &= -\varrho\,[\sum_{\mathrm{R}} e\,\mathfrak{r} + \sum_{\mathrm{R}} m\,\mathfrak{t} + \sum_{\mathrm{R}} \Gamma\,\mathfrak{J}] \times \mathfrak{v}_\infty \\ &\quad + \varrho\,[\sum_{\mathrm{A}} e\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}^* + \sum_{\mathrm{A}} m\,\mathfrak{t}\times\mathfrak{v}^* + \sum_{\mathrm{A}} m\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^* - \sum_{\mathrm{A}} \Gamma \int \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}^*\times d\mathfrak{s}]] \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Durch eine ähnliche Umformung wie in (23′) kann man noch $-\sum \Gamma\,\mathfrak{J} \times \mathfrak{v}_\infty$ durch $\sum \Gamma \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times d\mathfrak{s}]$ ersetzen und damit die formale Aehnlichkeit der Zusatzglieder mit den bei der inneren Aufgabe auftretenden Gliedern auch für die Wirbellinien herstellen.

**11. Schlußbemerkung.** Die Behandlung der entsprechenden ebenen Aufgabe führt zwar, am besten mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, zu ähnlichen Ergebnissen wie im Raum; indessen können diese nicht in einfacher Weise aus den hier abgeleiteten Sätzen durch Grenzübergang erhalten werden. Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, daß in der Ebene Wirbelpunkte, die den Stabwirbeln im Raum entsprechen, nicht ausgeschlossen zu werden brauchen; im Gegenteil sind sie von größtem und leicht berechenbarem Einfluß auf Kraft[1]) und Moment. Die entstehenden Formeln enthalten als einfachste Fälle die Kutta-Joukowskische Gleichung und die Blasiusschen Formeln, deren Gültigkeitsbereich sie erheblich erweitern. 171

# Potentialströmung durch Gitter.[2])

Von **E. KÖNIG** in Dresden.

Die Erfolge der Potentialtheorie in der Aerodynamik legen es nahe, diese Theorie auch auf Fragen der Turbinenlehre anzuwenden. Dabei hat man es mit der Strömung durch die Reihe der Turbinenkanäle zu tun, die man als ein regelmäßiges »Gitter« idealisieren kann. Die folgende Abhandlung hat zum Ziele, besondere Fragen, die bei Strömung durch Gitter auftreten, unter den Voraussetzungen, die die Potentialtheorie für das zweidimensionale Gebiet macht, zu diskutieren.

**1. Die Joukowskische Theorie und ihre Erweiterung auf Gitter.** Die Joukowskische Theorie geht bekanntlich aus von der konformen Abbildung des Strömungsgebietes in der Umgebung einer ebenen Platte auf das Gebiet im Außenraum eines Kreiszylinders. Von der Platte und dem Zylinder kommen dabei nur die ebenen Schnitte, Gerade bezw. Kreis, in Betracht. Statt der Abbildung auf das Aeußere des Kreises kann man auch die auf die Halbebene nehmen. Um die Analogie zwischen der Joukowskischen Theorie und der hier angewandten Methode hervortreten zu lassen, stellen wir die Joukowskische Theorie folgendermaßen dar: Der Schnitt einer ebenen Platte mit einer $z$-Ebene senkrecht zur Platte sei gegeben durch die Strecke $AB$, die gegen die negative $x$-Achse unter dem Winkel $\alpha$ geneigt ist. Nun richten wir die Joukowskische Abbildung so ein, daß die $z$-Ebene außerhalb der Strecke $AB$ auf die Halbebene $\eta > 0$ einer $\zeta$-Ebene abgebildet wird. Dabei soll die reelle Achse der $\zeta$-Ebene das Bild von $AB$ werden. Die Abbildungsfunktion lautet:

$$\frac{z-A}{z-B} = e^{-i\pi\alpha}\zeta^2.$$

In $A$ und $B$ der $z$-Ebene liegen Vorderkante und Hinterkante des Profils. Die Vorderkante $A$ geht in den Punkt $\zeta = 0$ über, die Hinterkante $B$ in den Punkt $\zeta = \infty$. Der Punkt $z = \infty$ wird $\zeta = i$. Der Oberseite von $AB$ entspricht der positive Halbstrahl der $\xi$-Achse und der Unterseite von $AB$ der negative Halbstrahl der $\xi$-Achse. In dieser Darstellung läßt sich die Joukowskische Theorie auch auf kreisbogenförmige Profile, dicke Profile und an den Enden zugespitzte Profile anwenden[3]).

[1]) Vergl. die S. 409 unter (1) zitierte Abhandlung S. 221 bis 224.

[2]) Auszug aus einer von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Dissertation.

[3]) Vergl. v. Kármán-Trefftz: Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Ztschr. f. Flugtechnik u. Motor-Luftschiffahrt, 1918.

**2. Die Abbildung.** Es ist nun unsere Aufgabe, diese Methode für ein Gitter mit unendlich vielen Schaufeln auszubilden. Es sei ein Gitter von unendlich vielen, geradlinigen, unendlich dünnen Konturen (Schaufeln) und »geneigter Gitterachse«, die die Enden der Schaufel verbindet, gegeben (Abb. 1). Führen wir ein Koordinatensystem so ein, daß die horizontal liegenden Schaufeln die Richtung für die $x$-Achse geben, und eine von ihnen auf der $x$-Achse liegt; ferner, daß die Gitterachse mit der positiven Richtung der $x$-Achse einen Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ bildet, die Gitterachse gegen die $y$-Achse also um den Winkel $\alpha$ geneigt ist. Der Abstand zweier Schaufeln längs der Gitterachse sei $t$. Legen wir durch die Schaufeln parallel der $x$-Achse Geraden, so wird die ganze $x$-$y$-Ebene in parallele Streifen aufgeteilt.

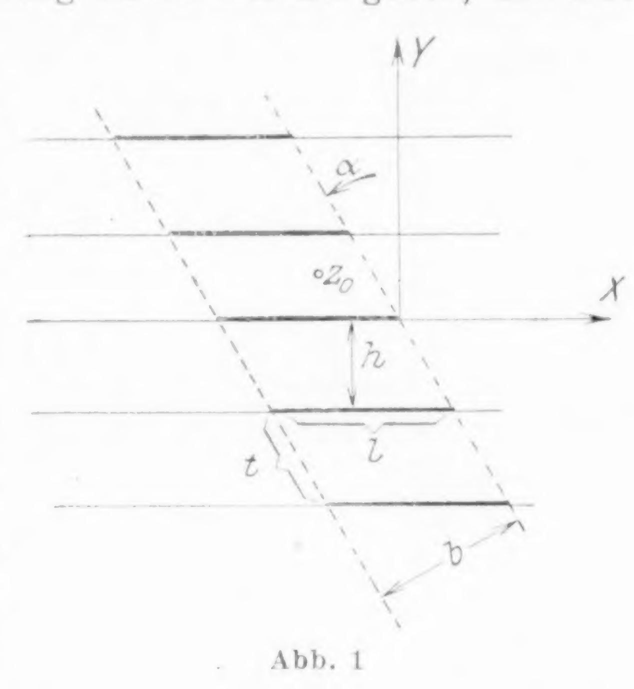


Abb. 1

Ist nun in dieser Ebene, die als $z$-Ebene bezeichnet wird, ein Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ gegeben, so gelangt man zu dem kongruenten Punkte im benachbarten Streifen, wenn man von $z_0$ zu $z_0 + ite^{i\alpha}$ geht, d. h. in der $x$-Richtung um das Stück $t \sin \alpha$ nach links und in der $y$-Richtung um $t \cos \alpha$ nach oben fortschreitet. Ein solcher Streifen von der Breite $t \cos \alpha$ stellt also für $z = x + iy$ einen Periodenstreifen dar.

Wird ein solcher Periodenstreifen der $z$-Ebene auf eine $\zeta^*$-Ebene konform durch

$$\zeta^* = e^{2\pi e^{-i\alpha}\frac{z}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

abgebildet, so überdeckt die Abbildung der übrigen Periodenstreifen jedesmal die $\zeta^*$-Ebene in gleicher Weise, d. h. so, daß kongruente Punkte zu demselben $\zeta^*$-Werte gehören; somit ergibt sich folgende Abbildung der $z$-Ebene auf die unendlich vielblättrige $\zeta^*$-Ebene. Es entspricht $\zeta^* = 0$ dem Punkte $z = -\infty$ und $\zeta^* = +\infty$ dem Punkte $z = +\infty$. Geht man nun von einem Punkte $z$ zu dem kongruenten Punkte $z + ite^{i\alpha}$, so wird

$$\zeta^*(z + ite^{i\alpha}) = \zeta^*(z)\, e^{2\pi i} = \zeta^*(z).$$

Um die Abbildung auf die $\zeta^*$-Ebene zu übersehen, benutzen wir die logarithmische Schreibweise:

$$\ln \zeta^* = 2\pi \frac{z}{t} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Bekommt der Realteil oder Imaginärteil von $\ln \zeta^*$ einen konstanten Wert, so entsprechen ihm in der $z$-Ebene Geraden parallel und senkrecht zur Gitterachse. In der $\zeta^*$-Ebene entsprechen dem Realteil Kreise um den Nullpunkt und dem Imaginärteil Geraden durch den Nullpunkt. Nun war in der $z$-Ebene das Koordinatensystem so gewählt, daß die als geradlinig vorausgesetzten Schaufeln in Richtung der $x$-Achse fallen. Diese schneiden aber die Geraden, die $\Re(\ln \zeta^*) =$ konst. entsprechen, unter konstantem Winkel. Also wird in der $\zeta^*$-Ebene die Schaufel sich auf ein Kurvenstück abbilden, das die Radien durch den Nullpunkt bezw. die Kreise um den Nullpunkt unter konstantem Winkel schneidet, also auf ein Stück einer logarithmischen Spirale.

In der $\zeta^*$-Ebene haben wir also folgende Abbildung der $z$-Ebene, die wir der Anschaulichkeit wegen als Strömung beschreiben, d. h. wir fassen die Bilder der Geraden $y =$ konst. als Stromlinien, die Graden $x =$ konst. als Potentiallinie einer Potentialströmung in der $\zeta^*$-Ebene auf, und zwar geht die Strömung in logarithmischen Spiralen von der Quelle $\zeta^* = 0$ zur Senke $\zeta^* = \infty$. Ebenso sind die Bilder der Potentiallinien $x =$ konst. logarithmische Spiralen, die auf den logarithmischen Spiralen $y =$ konst senkrecht stehen. Beide kommen aus dem Punkte $\zeta^* = 0$ heraus, und zwar schneiden die Linien $y =$ konst. die Geraden durch den Nullpunkt unter dem Winkel $\alpha$. Wir erhalten also eine Strömung, bei der im Nullpunkte eine Quelle von der Ergiebigkeit $\Re(\ln \zeta^*)$ und ein Wirbelfaden mit der Zirkulation $\Im(\ln \zeta^*)$ liegt. Dieses Zusammenfallen von Quelle und Wirbelfaden bezeichnen wir kurz als »Wirbelquelle«. Natürlich liegt dem entsprechend in dem unendlich fernen Punkte eine »Wirbelsenke«. Wir bezeichnen das Bild der Schaufel (d. h. das Stück der logarithmischen Spirale $y = 0$) mit $H - V$ ($H$ Hinterkante, $V$ Vorderkante). Jetzt bilden wir weiter das Gebiet um das

Schaufelbild in der $\zeta^*$-Ebene auf die obere $\zeta$-Halbebene ab ($\zeta = \xi + i\eta$). Bei dieser Abbildung möge die Wirbelquelle und die Wirbelsenke in die Punkte $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta_1$ rücken. Die Schaufel gehe in die $\xi$-Achse über und zwar die Vorderkante in den Nullpunkt und die Hinterkante in das Unendlichferne. Diese Abbildung erreicht man offenbar dadurch, daß man Wirbelquelle und Wirbelsenke an der $\xi$-Achse spiegelt, wodurch diese Stromlinie wird. Wir können nun in einfacher Weise die Beziehung zwischen der $z$-Ebene und der $\zeta$-Ebene herstellen. Betrachten wir $z$ als Funktion von $\zeta$, so muß nach dem Vorhergehenden zunächst an den Stellen $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta_1$ eine Wirbelquelle bezw. eine Wirbelsenke liegen. In der unteren Hälfte der $\zeta$-Ebene liegen die Spiegelbilder der Wirbelquelle und der Wirbelsenke in $\overline{\zeta}_0$ und $\overline{\zeta}_1$.

Die Wirbelquelle und Wirbelsenke wird dargestellt durch die Funktion

$$C\,e^{i\alpha}\ln\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\zeta_1}.$$

Entsprechend der Spiegelung fügen wir die konjugierte Funktion hinzu und erhalten:

$$z = C\left\{e^{i\alpha}\ln\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\zeta_1} + e^{-i\alpha}\ln\frac{\zeta-\overline{\zeta}_0}{\zeta-\overline{\zeta}_1}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

**3. Beziehung zwischen den geometrischen Größen der Schaufelanordnung und den Konstanten der Abbildungsfunktion.** Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den geometrischen Größen der Schaufelanordnung und den Konstanten $\zeta_0$ und $\zeta_1$ herstellen. Dem Punkte $\zeta = \zeta_0$ entspricht $z = -\infty$ (Abb. 2) und $\zeta = \zeta_1$ der Punkt $z = +\infty$ Die Ableitung der Abbildungsfunktion

$$\frac{dz}{d\zeta} = C\left\{e^{i\alpha}\frac{(\zeta_0-\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)} + e^{-i\alpha}\frac{(\overline{\zeta}_0-\overline{\zeta}_1)}{(\zeta-\overline{\zeta}_0)(\zeta-\overline{\zeta}_1)}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

besteht ebenfalls, wie die Abbildungsfunktion selber, aus der Summe zweier konjugiert-komplexer Größen. Für reelle Werte von $\zeta$ wird also auch $\frac{dz}{d\zeta}$ reell, und somit ist das Bild der $\xi$-Achse horizontal. Der Ausdruck (4) verschwindet für zwei Werte von $\zeta$. Wir erhalten also zwei Verzweigungspunkte, die der Vorderkante $V$ und der Hinterkante $H$ der Schaufel entsprechen, und wir wollen verlangen, daß der eine in den Nullpunkt fällt, der andere in das Unendlichferne. Diese Bedingungen bestimmen $\zeta_0$ und $\zeta_1$. Für $\zeta = 0$ soll also $\frac{dz}{d\zeta} = 0$ sein,

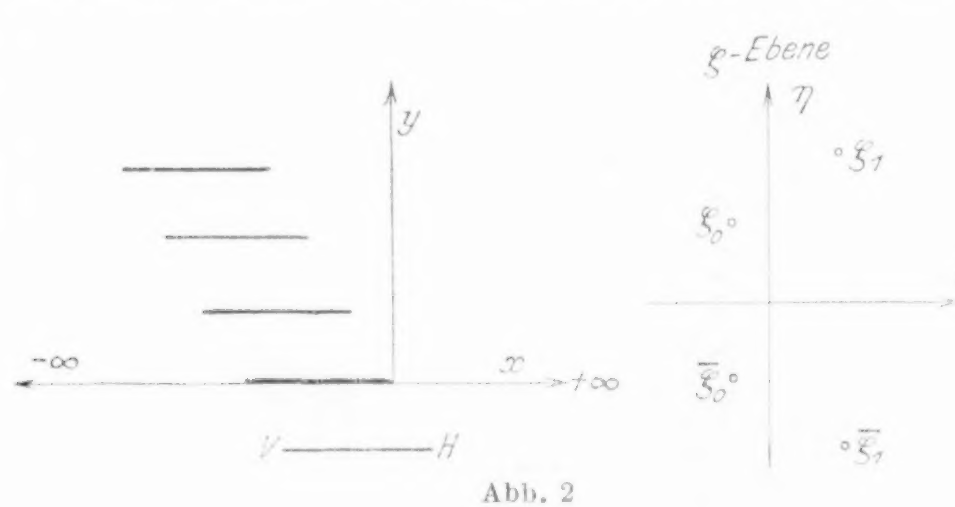


Abb. 2

und für $\zeta = \infty$ muß $\frac{dz}{d\zeta}$ von der dritten Ordnung verschwinden. Schreiben wir die Gl. (4) in der Form:

$$\frac{dz}{d\zeta} = C\left\{\frac{e^{i\alpha}(\zeta_0-\zeta_1)(\zeta-\overline{\zeta}_0)(\zeta-\overline{\zeta}_1) + e^{i\alpha}(\overline{\zeta}_0-\overline{\zeta}_1)(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\overline{\zeta}_0)(\zeta-\overline{\zeta}_1)}\right\} \quad . \ . \ . \quad (5),$$

so muß im Zähler das Glied mit $\zeta^2$ verschwinden, damit die Bedingung im Unendlichen erfüllt ist, und das absolute Glied muß gleich Null werden, damit $\zeta = 0$ Verzweigungspunkt wird, d. h. es muß

$$e^{i\alpha}(\zeta_0-\zeta_1) + e^{-i\alpha}(\overline{\zeta}_0-\overline{\zeta}_1) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

und

$$e^{i\alpha}(\zeta_0-\zeta_1)\overline{\zeta}_0\overline{\zeta}_1 + e^{-i\alpha}(\overline{\zeta}_0-\overline{\zeta}_1)\zeta_0\zeta_1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

sein. Setzen wir (Abb. 3)

$$\zeta_0-\zeta_1 = d\,e^{i\delta} \quad , \quad \overline{\zeta}_0-\overline{\zeta}_1 = d\,e^{-i\delta},$$

so wird nach Gl. (6)

$$\cos(\alpha+\delta) = 0 \text{ oder } \alpha+\delta = {}^1/_2\,\pi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8).$$

Setzen wir ferner $\zeta_0 = r_0\,e^{i\vartheta_0}$, $\zeta_1 = r_1\,e^{i\vartheta_1}$, $\overline{\zeta}_0 = r_0\,e^{-i\vartheta_0}$, $\overline{\zeta}_1 = r_1\,e^{-i\vartheta_1}$, so folgt aus Gl. (7) bei Berücksichtigung von (8)

$$\sin(\vartheta_0+\vartheta_1) = 0 \quad \text{und somit} \quad \vartheta_0+\vartheta_1 = \pi.$$

Gl. (5) erhält dann die Form:

$$\frac{dz}{d\zeta} = -Cd^2 \frac{2\zeta\cos\alpha}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\bar{\zeta}_1)} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Die Punkte $\zeta_0$ und $\zeta_1$ müssen also, wenn die Verzweigungspunkte (Schaufelenden) in den Nullpunkt und das Unendlichferne fallen, auf zwei Halbstrahlen liegen, die symmetrisch zur $\eta$-Richtung liegen. Die Lage der Punkte $\zeta_0$ und $\zeta_1$ auf diesen Halbstrahlen ist nach Gl. (8) so zu wählen, daß ihre Verbindungsstrecke den Winkel $\delta = \pi/2 - \alpha$ mit der $\xi$-Achse bildet. Wegen der Willkürlichkeit des Maßstabes in der $\zeta$-Ebene (Gl. (3) ist homogen und vom Grade Null in $\zeta$) ist die Gerade nur der Richtung nach bestimmt, ihre Lage ist beliebig.

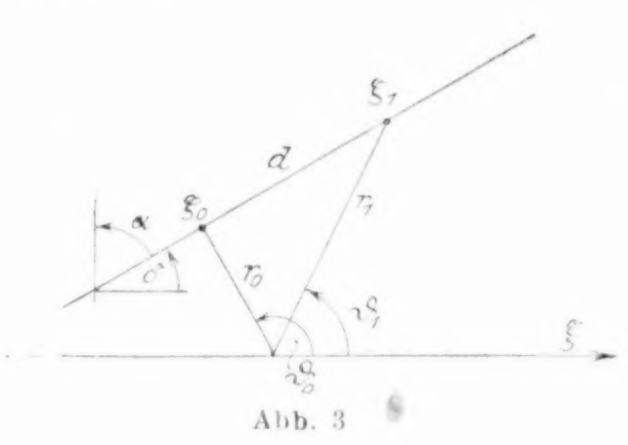


Abb. 3

Durch die Abbildung geht nun der Punkt $\zeta = \infty$ in den Punkt $z = 0$ über, dadurch ist in der $z$-Ebene der Nullpunkt des Koordinatensystems bestimmt. Dem Punkt $\zeta = 0$ entspricht dann die Vorderkante

$$z_0 = 2C\left\{\cos\alpha \ln\frac{r_0}{r_1} - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\sin\alpha\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

$z_0$ ist negativ, wie wir sehen werden, entsprechend der Festsetzung, daß die Vorderkante links von der Hinterkante liegen soll (siehe Abb. 2). Da die Hinterkante im Nullpunkt liegt, gibt der Absolutbetrag von $z_0$ die Schaufellänge $l$ an.

Wird ferner in der $\zeta$-Ebene von einem beliebigen Punkte der $\xi$-Achse aus ein geschlossener Weg durchlaufen, z. B. einmal um den Punkt $\zeta_0$ herum, so daß der Punkt $\zeta_0$ dauernd zur Linken bleibt, und wird über diesen Weg integriert, so wird

$$\int_{\zeta_0} dz = C e^{i\alpha} 2\pi i.$$

In dem Bilde dieses Weges in der $z$-Ebene kehren wir nicht zum Ausgangspunkt zurück, sondern kommen zu dem kongruenten Punkte der nächsten Schaufel. Ein Umlauf von $\zeta = 0$ um $\zeta = \zeta_0$ herum nach $\zeta = 0$ zurück ergibt also in der $z$-Ebene einen Weg von einer Schaufelvorderkante zur nächsten. Der Imaginärteil von $C e^{i\alpha} \cdot 2\pi i$ liefert den Abstand der Schaufeln

$$h = 2\pi C\cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

und der Realteil die Staffelung

$$p = -2\pi C\sin\alpha.$$

Es fragt sich nun, wie wir $\zeta_0$ und $\zeta_1$ zu wählen haben, um ein vorgegebenes Gitter abzubilden. Aus der Zusammenfassung von Gl. (10) und (11) ergibt sich:

$$\pi\frac{l}{h} = \ln\frac{r_0}{r_1} - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\operatorname{tang}\alpha \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Berücksichtigt man, daß $\vartheta_0 = \pi - \vartheta_1$ ist und

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\sin(\vartheta_1 - \delta)}{\sin(\vartheta_1 + \delta)} = -\frac{\cos(\vartheta_1 + \alpha)}{\cos(\vartheta_1 - \alpha)}$$

wie es aus Abb. 3 abzulesen ist, so folgt

$$\operatorname{tang}\vartheta_1 = \frac{1 + \frac{r_0}{r_1}}{1 - \frac{r_0}{r_1}}\operatorname{cotang}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und als Bestimmungsgleichung für $\vartheta_1$:

$$\pi\frac{l}{h} = \ln\frac{\sin(\vartheta_1 - \delta)}{\sin(\vartheta_1 + \delta)} - (\pi - 2\vartheta_1)\operatorname{tang}\alpha \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

denn $l$, $h$ und $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ sind durch ein vorgelegtes Gitter bestimmt. Für $\vartheta_1 = {}^1/_2\,\pi$ wird $\frac{l}{h}$ gleich Null und für $\vartheta_1 = \delta$ wird es negativ unendlich. Da $l$ infolge der Wahl des Koordinatensystems negativ ist, werden durch die Werte für $\vartheta_1$ von ${}^1/_2\,\pi$ bis $\delta$ vorkommende Fälle beherrscht. $\vartheta_1 < \delta$ ist ausgeschlossen, weil sonst $\zeta_0$ oder $\zeta_1$ in die

untere Halbebene fällt. $\vartheta_1 > \frac{\pi}{2}$ liefert nach Vertauschung von $\zeta_0$ und $\zeta_1$ das gleiche Resultat wie oben.

Ferner folgt aus der unendlichen Vieldeutigkeit des Logarithmus, daß sich alle Periodenstreifen in gleicher Weise auf die obere $\zeta$-Halbebene abbilden.

Für die praktische Rechnung können folgende Näherungsformeln benutzt werden:

$$\frac{l}{h} \text{ klein: } 1 - \frac{r_0}{r_1} = \frac{b}{t}\left[1 - \frac{b}{2\,t} + \left(\frac{b}{2\,t}\right)^2 \left(1 + \frac{2\cos 2\,\alpha}{3\cos^2\alpha}\right)\right],$$

$$\frac{l}{h} \text{ groß: } \frac{r_0}{r_1} = e^{2\,\alpha \tan\alpha - \pi \frac{l}{h}},$$

wenn $b = \frac{l}{\cos\alpha}$ die »Gittertiefe« und $t = \frac{h}{\cos\alpha}$ die »Gitterteilung« ist. (Siehe Abb. 1.)

**4. Die Stromfunktion.** Zur Stromfunktion gelangen wir, wenn wir fordern, daß die Strömung von $z = -\infty$ kommen soll, dort unter einem bestimmten Winkel gegen die $x$-Achse geneigt ist und nach $z = +\infty$ abfließen soll, mit der Bedingung, daß an der Hinterkante der Schaufel die Strömungsgeschwindigkeit endlich bleibt. Durch die Abbildung sind die Punkte $\zeta_0$ und $\zeta_1$ gegeben. Legen wir in sie eine Wirbelquelle bezw. eine Wirbelsenke; damit die $\xi$-Achse Stromlinie wird, muß das Spiegelbild hinzugenommen werden. Ist $Q$ das Maß für die Quellstärke und $S$ das Maß für die Senkstärke, so lautet der Ansatz:

$$\Omega(z) = \Omega[f(\zeta)] = \omega(\zeta) = C Q [e^{-i\sigma} \ln(\zeta - \zeta_0) + e^{i\sigma} \ln(\zeta - \bar\zeta_0)]$$
$$+ C S [e^{-i\tau} \ln(\zeta - \zeta_1) + e^{i\tau} \ln(\zeta - \bar\zeta_1)] \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei $\sigma$ und $\tau$ von der Normalen zur Gitterachse links herum positiv gezählt werden. Die Geschwindigkeitskomponenten in der $x$-Richtung bezw. $y$-Richtung sind:

$$u_{-\infty} = Q\cos(\alpha + \sigma); \quad u_{+\infty} = S\cos(\alpha + \tau),$$
$$v_{-\infty} = Q\sin(\alpha + \sigma); \quad v_{+\infty} = S\sin(\alpha + \tau).$$

Die Zirkulation um eine einzelne Schaufel bestimmt sich aus der Forderung der endlichen Geschwindigkeit an der Hinterkante der Schaufel. Ist die Zirkulation bekannt, so ist damit der Zusammenhang zwischen Anströmrichtung und Abflußrichtung im Unendlichen gegeben, also die Beziehung zwischen $Q$, $S$, $\sigma$, $\tau$.

Der Hinterkante entspricht in der $\zeta$-Ebene der Punkt $\zeta = \infty$. In ihm war $\frac{dz}{d\zeta} \sim \frac{c}{\zeta^3} + \ldots.$ Soll nun $\frac{d\,\Omega(z)}{dz}$ für $\zeta = \infty$ einen endlichen Wert erhalten, so muß $\frac{d\,\omega(\zeta)}{d\zeta}$ ebenfalls von der dritten Ordnung Null werden. Eine Reihenentwicklung im Unendlichen ergibt:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{2\,C}{\zeta}(Q\cos\sigma + S\cos\tau) + \frac{2\,C}{\zeta^2}[Q r_0 \cos(\vartheta_0 - \sigma) + S r_1 \cos(\vartheta_1 - \tau)]$$
$$+ \frac{2\,C}{\zeta^3}\{C r_0^2 \cos(2\,\vartheta_0 - \sigma) + S r_1^2 \cos(2\,\vartheta_1 - \tau)\} + \ldots\ldots$$

Damit nun das Nullwerden dritter Ordnung für $\zeta = \infty$ eintritt, müssen die Zähler der Glieder mit $\frac{1}{\zeta}$ und $\frac{1}{\zeta^2}$ jedes für sich gleich Null werden. So ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$Q\cos\sigma = -S\cos\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und

$$Q r_0 \cos(\vartheta_0 - \sigma) = -S r_1 \cos(\vartheta_1 - \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Gl. (16) ist die Kontinuitätsbedingung, denn diejenige Flüssigkeitsmenge, die senkrecht auf das Gitter zufließt, muß auch in senkrechter Richtung abfließen.

Die durch die Abbildung gegebenen Größen sind $r_0$, $r_1$, $\vartheta_0$, $\vartheta_1$; $Q$ und $\sigma$ sind durch das Anströmen bestimmt. Durch die beiden Gl. (16) und (17) werden $S$ und $\tau$ in Abhängigkeit von diesen Größen festgelegt, d. h. für $z = +\infty$ die Strömungsgeschwindigkeit und die Stromrichtung. Mithin ist auch die Ablenkung, die die Strömung durch das Gitter erfährt, bestimmt. Sie überträgt auf das Gitter eine Kraft, die nach zwei Komponenten zerlegt werden kann, und die mit Rücksicht auf die Anwendung auf die Turbinentheorie »Tangentialschub $T$« und »Axialschub $W$« heißen.

**5. Tangentialschub und Axialschub.** Von praktischem Interesse ist nun die Frage, wie hängen Zufluß- und Abflußrichtung von der gegenseitigen Lage der Schaufeln ab, also von ihrer Länge, von ihrem gegenseitigen Abstande und von der Staffelung. Als

Beziehung zwischen Zufluß- und Abflußrichtung ergibt sich mit Rücksicht auf oben angeführte Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \sigma - \operatorname{tang} \tau = \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \frac{\sin(\alpha + \sigma)}{\cos \alpha \cos \sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Dieser Wert ist proportional dem Tangentialschub $T$. Nennen wir $T_\infty$ den Wert den $T$ für den Grenzfall $\frac{l}{h} = \infty$ annimmt, und bilden wir den Quotienten $\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{r_0}{r_1}$, so gibt dieser Quotient an, wie groß für ein bestimmtes $\frac{l}{h}$ der Tangentialschub ist im Vergleich zu dem, der sich für den günstigsten Fall $\frac{l}{h} = \infty$ erreichen ließe. Aus Abb. 4 ist für den Sonderfall $\sigma = 0^0$ $\frac{T}{T_\infty}$ als Ordinate aufgetragen, $\frac{b}{t}$ als Abszisse. Um die Abhängigkeit von $\alpha$ zum Ausdruck zu bringen, sind die Kurven für $\alpha = 15^0$, $\alpha = 30^0$ und $\alpha = 45^0$ gezeichnet. Es zeigt sich, daß man in der Praxis gute Wasser- bzw. Luftführung auch durch kurze und weitstehende Schaufeln erreichen kann, was auch die neuesten Erfahrungen bestätigen. (Vergl. Oesterlen, Schnelllaufende Wasserturbinen, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. Nr. 16, 1921.)

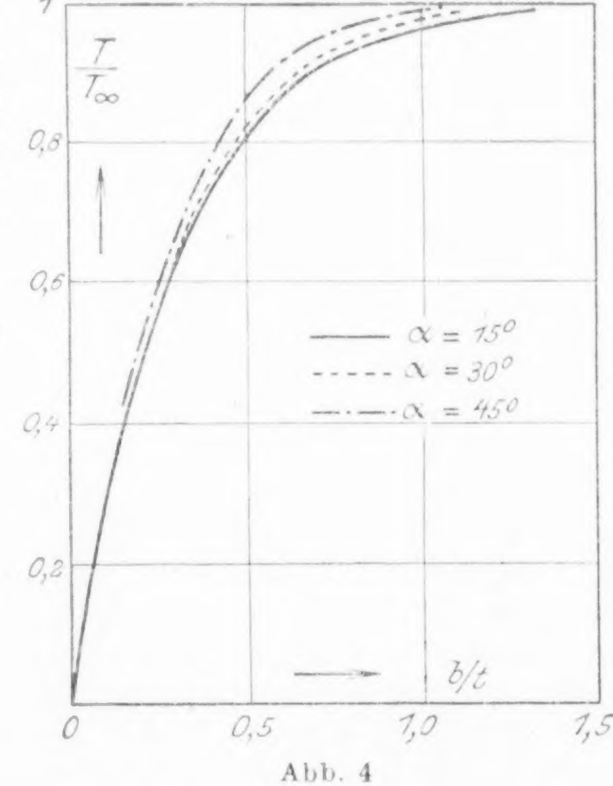


Abb. 4

Andererseits läßt sich $T$ mit dem Auftrieb einer Einzelfläche $A$ vergleichen. Der Auftrieb einer Einzelfläche ist nach Joukowski

$$A = \frac{\gamma}{g} U J$$

$\left(\frac{\gamma}{g} = \text{Dichte}, U = \text{Anströmgeschwindigkeit}, J = \text{Zirkulation}\right)$. Aus der Zusammenfassung der oben angeführten Gleichungen folgt:

$$\frac{T}{A} = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \frac{t}{b}}{\pi \cos \sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Der Faktor $\frac{1}{\cos \sigma}$ rührt von dem Richtungsunterschied von $T$ und $A$ her. Beschränken wir uns auf den Fall $\sigma = 0$, so gilt für $\frac{b}{t}$ klein

$$\frac{T}{A} = 1 - \frac{\pi \frac{b}{t}}{2} + \left(\frac{\pi \frac{b}{t}}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{2 \cos 2\alpha}{3 \cos^2 \alpha}\right).$$

Der Wert von $T$ nähert sich also bei Vergrößerung des Schaufelabstandes ($t = \infty$) dem Werte $A$, d. h. die aufgestellte Formel geht für diesen Spezialfall in die Joukowskische für eine Einzelplatte über.

**6. Gekrümmte Schaufeln und Schaufeln mit endlicher Dicke.** Krummlinige Gitterprofile und Profile von endlicher Dicke werden analog erzeugt wie krummlinige Einzelprofile. Als Bild eines solchen Profils wählen wir in der $\zeta$-Ebene eine Gerade. Geht die Gerade durch den Nullpunkt und ist sie unter dem Winkel $\beta$ gegen die $\xi$-Achse geneigt, so ist ihr Bild eine unendlichdünne, gekrümmte Schaufel, deren Endtangenten wegen der Singularität in den Punkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ mit der $x$-Achse die Winkel $2\beta$ bezw. $\pi - 2\beta$ einschließen. $\beta$ ist ein Maß für die Krümmung. Das Bild dicker Profile in der $\zeta$-Ebene ist eine Gerade, die an dem Nullpunkt vorbeigeht. Die so gefundenen Profile stimmen mit den in der Praxis verwandten gut überein. Dicke Profile können wir aber auch bilden, wenn die Oberseite und Unterseite des Profils in der $\zeta$-Ebene durch Halbstrahlen gebildet werden, die im Nullpunkt um $k\pi$ gegeneinander geneigt sind, ganz in Analogie zu der in der Einleitung erwähnten Methode[1]).

[1]) Vergl. v. Karman-Trefftz, a. a. O.

Die Stromfunktion für gekrümmte Profile erhalten wir ganz analog wie oben durch Spiegelung von $\zeta_0$ und $\zeta_1$ an der Geraden, die das Bild der Schaufel ist. Bei gekrümmten Profilen läßt sich neben glattem Abfluß an der Hinterkante auch noch stoßfreier Eintritt erzielen. $\sigma$ und $\tau$ werden dann durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{\left(\frac{r_0}{r_1} + \frac{r_1}{r_0}\right) \cos(\vartheta_1 + \beta) + 2 \cos(\vartheta_1 - \beta)}{\left(\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_1}{r_0}\right) \sin(\vartheta_1 + \beta)} \; ; \quad \operatorname{tang} \tau = \frac{\left(\frac{r_0}{r_1} + \frac{r_1}{r_0}\right) \cos(\vartheta_1 - \beta) + 2 \cos(\vartheta_1 + \beta)}{\left(\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_1}{r_0}\right) \sin(\vartheta_1 - \beta)} \, ,$$

woraus nach Elimination von $\vartheta_1$ und $\frac{r_0}{r_1}$ folgt: $\sigma + \tau + 2\alpha = 0$.

Für den Sonderfall $\frac{l}{h} = \infty$ ergibt sich bei gegebener Ablenkung $\tau - \sigma$ für $\beta$ ein Minimalwert: $\beta_\infty = \frac{\tau - \sigma}{2}$.

Diese Gleichungen lassen folgendes Resultat erkennen: Stoßfreier Eintritt und glatter Abfluß werden also nicht erzielt, wenn die Strömung in großer Entfernung vor und hinter dem Gitter in Richtung der Schaufeltangenten fließt, sondern die Strömung ist gegen die Tangentenrichtung geneigt. Weicht die Strömung vor dem Gitter gegen die Tangentenrichtung nach rechts ab, so ist sie hinter dem Gitter um den gleichen Betrag nach links gerichtet.

**7. Anwendung auf die Turbinentheorie.** Es ist noch die Frage offen, wie die vorstehenden Betrachtungen auf die Turbinen zu übertragen sind. Bei Turbinen haben wir eine dreidimensionale Bewegung, während oben eine zweidimensionale behandelt ist. Es kann sich also bei der Uebertragung der Resultate nur um Näherungen handeln, die mehr oder weniger genau sind, entsprechend der Abweichung der Flüssigkeitsbewegung in den Turbinen von einer ebenen Bewegung. Hierbei verhalten sich die einzelnen Turbinenarten verschieden. Zunächst sind auf ein feststehendes Leitwerk die obigen Resultate anwendbar. Für Axialturbinen, bei denen die Schaufelhöhe klein ist gegen den Durchmesser, so daß die Radialgeschwindigkeiten und ihre Ableitungen gegen die axialen und tangentialen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden können, kann die Strömung ohne weiteres als eine ebene aufgefaßt werden, wenn man sich die mittlere durch die Schaufel gelegte Zylinderfläche abgewickelt denkt. Um eine stationäre Strömung zu erhalten, bezieht man die Strömung durch das Leitrad auf ein festes Koordinatensystem, die Strömung durch das Laufrad auf ein mitbewegtes, also in der Abwicklung geradlinig gleichförmig bewegtes Koordinatensystem. In beiden Fällen hat man Strömungen durch Gitter, wie sie oben behandelt sind; die angegebenen Methoden sind also unverändert anwendbar.

Für Radialturbinen idealisiert man die Strömung in der Weise, daß man etwa eine Strömung betrachtet, welche radial aus dem Unendlichen kommend von außen nach innen in ebener Strömung durch die rotationssymmetrisch angeordneten Leit- und Laufschaufeln strömt, um im Nullpunkt in einer Senke zu enden. Eine solche Strömung erhält man, wenn man die von uns behandelte Gitterströmung durch eine Transformation

$$Z = \zeta^{*\,1/n} \quad \text{(siehe Gl. 1)}$$

umformt, wobei aus der Parallelströmung durch das Gitter von unendlich vielen Schaufeln eine Radialströmung durch $n$ Schaufeln wird. Dies ist jedoch nur für die Strömung durch das Leitrad möglich; da man nämlich die Strömung durch das Laufrad, um eine stationäre Strömung zu bekommen, auf ein rotierendes Koordinatensystem beziehen muß, ergibt sich inbezug auf ein solches Koordinatensystem für das Potential die Differentialgleichung $\Delta \varphi = \text{const}$, zu deren Integration zwar die Abbildung des Schaufelsystems auf die Ebene unverändert benutzt werden kann, die zu lösende Randwertaufgabe aber verändert wird, so daß auch die oben gegebenen Formeln für die auf die Schaufeln wirkenden Kräfte ihre Gültigkeit verlieren. Deshalb beschränken wir uns im folgenden auf Axialturbinen.

In den oben angestellten Betrachtungen handelt es sich immer um Relativströmung, d. h. es wird angenommen, daß das Gitter feststeht und die Flüssigkeit sich gegenüber dem Gitter bewegt. Für das Leitwerk läßt sich die Austrittsrichtung des Flüssigkeitsstromes also ohne weiteres angeben. Da nun aber das Laufrad sich gegenüber dem Leitwerk bewegt, ist nicht die Richtung eines jeden Flüssigkeitsfadens von Interesse, sondern ein Mittelwert, der sich aus den Richtungen aller Stromfäden zusammensetzt.

Die Schaufelform und Schaufelanordnung des Laufrades bestimmt die Relativströmung der Flüssigkeit zum Laufrade. Unter Berücksichtigung der absoluten Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades $u$ und der Relativströmung der Flüssigkeit zum Laufrade, für die stoßfreier Eintritt gefordert wird, läßt sich die Absolutströmung $c_a$ ermitteln, wobei die Absolutströmung beim Laufradeintritt mit der Strömung beim Leitradaustritt übereinstimmen muß (Abb. 5). Durch diese Forderung ist die Stromrichtung beim Leitradaustritt bestimmt. Beim Austritt aus dem Laufrade wird die absolute Stromrichtung ebenso ermittelt wie beim Eintritt in das Laufrad, wobei die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades dieselbe ist und die Richtung der Relativströmung mit der Richtung der Schaufeltangente denselben Winkel einschließt wie beim Eintritt.

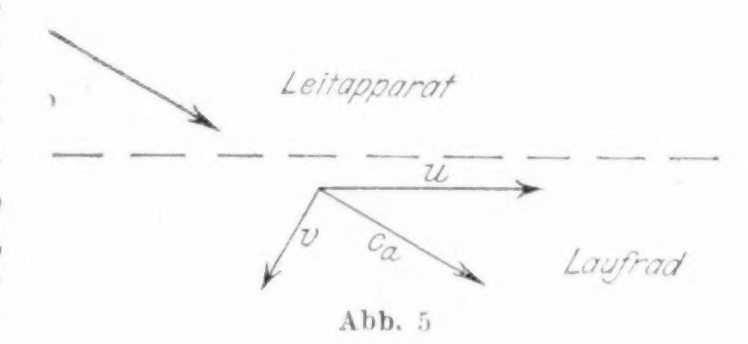


Abb. 5

Die von dem Flüssigkeitsstrom auf das Laufrad übertragene Kraft zerlegen wir in zwei Komponenten, einmal den Tangentialschub und zum anderen in den Axialschub. Der Tangentialschub wirkt in Richtung der Tangente an das Laufrad und ist für die Arbeitsleistung der Turbine bestimmend; er ist gleich der Impulsdifferenz beim Eintritt und Austritt der Flüssigkeit aus dem Laufrade, also dem aus der Relativströmung ermittelten Tangentialschub. Der Axialschub wird vom Lager aufgenommen oder hebt sich bei Zwillingsanordnung auf. Er bestimmt sich aus der Druckdifferenz vor und hinter dem Laufrade in gleicher Weise wie bei der Relativströmung[1]. 182

# Über hyperboloidische Verzahnung.

Von **E. STÜBLER** in Berlin-Dahlem.

In seiner Abhandlung: Ueber die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff[2]) hat M Disteli diejenigen Raumverzahnungen behandelt, bei denen die Profilflächen, d. h. die Arbeitsflanken der Radzähne, windschiefe Regelflächen sind, die sich stets längs einer Erzeugenden berühren. Man wird vermuten, daß der Fall in die Ebene abwickelbarer Profilflächen als Sonderfall unter jenen Verzahnungen enthalten sei. Dies trifft aber merkwürdigerweise nicht zu. Der Grund liegt darin, daß bei einer Bewegung zweier Regelflächen gegeneinander, wobei sie sich stets längs einer Erzeugenden berühren, die windschiefen Regelflächen sich ganz anders verhalten als die abwickelbaren. Während nämlich jene sich nur so berühren können, daß die Zentralpunkte der beiden koinzidierenden Erzeugenden, die ja auch denselben Verteilungsparameter[3]) besitzen müssen, zusammenfallen, ist für die Berührung zweier abwickelbarer Flächen durchaus nicht Bedingung, daß die Zentralpunkte, die auf den Rückkehrkanten liegen, zusammentreffen.

So kommt es, daß der Fall abwickelbarer Profilflächen gesondert behandelt werden muß. Zudem sind doch diese Profilflächen leichter technisch herzustellen als die windschiefen, wenn man etwa die Schraubenflächen ausnimmt.

---

[1]) Vergl. Dr.-Ing. Bauersfeld, Die Grundlagen zur Berechnung schnellaufender Kreiselräder, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1922.

[2]) Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 59, 1911, S. 244.

[3]) Zur Erklärung dieser und einiger anderer hier verwendeter Begriffe aus der Geometrie der Regelflächen sei folgendes gesagt. Bewegt sich eine Gerade im Raum so, daß zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen einen Punkt gemeinsam haben, so beschreibt sie eine »abwickelbare« Regelfläche. Eine »windschiefe« Regelfläche entsteht, wenn zwei Nachbarlagen einer bewegten Geraden nicht nur einen kleinen Winkel, sondern auch einen von Null verschiedenen kleinsten Abstand aufweisen. Das Verhältnis dieses Abstandes zum Winkel (im Bogenmaß) heißt der »Verteilungsparameter«; er ist für die abwickelbaren Regelflächen Null. Der Zentralpunkt ist der Punkt der Geraden, welcher der Nachbargeraden am nächsten gelegen ist; eine Ebene durch die Gerade, welche zur Nachbargeraden parallel ist, heißt »asymptotische« Ebene, die dazu senkrechte Ebene »Zentralebene«, das gemeinsame Lot von Nachbargeraden »Striktionsstrahl«, der Ort der Zentralpunkte »Striktionslinie« (bei der abwickelbaren Regelfläche »Rückkehrkurve«).

Nach M. Disteli[1]) entsteht die Eingriffsfläche der windschiefen Profilflächen, d. h der Ort ihrer Berührungslinien im ruhenden Raum als Bahnfläche einer beliebigen Geraden eines in besonderer Weise bewegten räumlichen Hilfssystems. Es zeigt sich, daß diese Distelische Hilfsbewegung im engsten Zusammenhang mit der Theorie der Bertrandschen Kurven steht, derart, daß zu jedem Paar Bertrandscher Kurven eine bestimmte Bewegung dieser Art gehört. Der Fall, wo die Kurven Schraubenlinien sind, ist von Disteli und von R. Crain[2]) auch graphisch durchgeführt worden. Ebenso könnte man aus den von E. Salkowski[3]) angegebenen Bertrandschen Kurvenpaaren Profilflächen für geradlinigen Eingriff ableiten. Man ersieht daraus, welche Hindernisse der praktischen Verwendung der schönen Theorie im Wege stehen, da erst Quadraturen, auf welche die analytische Darstellung der Bertrandschen Kurven führt[4]), auszuführen sind.

Demgegenüber sind die Konstruktionen, die zu abwickelbaren Profilflächen führen, ohne große Schwierigkeit durchzuführen. Für verschiedene einfache Fälle sind die nötigsten Angaben gemacht worden.

Es ist leicht einzusehen, daß zu jeder hyperboloidischen Verzahnung mit geradlinigem Eingriff eine konische gehört, die geradezu als die sphärische Abbildung jener bezeichnet werden kann. Man erhält sie, indem man durch einen beliebigen Anfangspunkt Parallelen zu den Radachsen sowie zu den Erzeugenden der Profilflächen legt. Drehen sich die entsprechenden Kegel- und Hyperboloidräder mit derselben Winkelgeschwindigkeit, so bleiben entsprechende Erzeugende parallel. Sind die Profilflächen der Hyperboloidräder windschief, so ist die Berührungsebene der Kegelprofile parallel zur asymptotischen Ebene der Erzeugenden jener Profilfläche. Umgekehrt kann man aus jeder konischen Verzahnung eine Distelische Hilfsbewegung, sowie eine Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen herleiten.

Der zweite Abschnitt der vorliegenden Abhandlung betrifft die allgemeine räumliche Verzahnung mit krummlinigem Eingriff, insbesondere das Problem, aus einer gegebenen Eingriffsfläche alle zugehörigen Profilflächenpaare herzuleiten. Hier spielen diejenigen Kurven eine wichtige Rolle, die bei der Zahnradbewegung dauernd in gleitender Berührung sind. Sie haben die Eigenschaft, daß sie sich ganz losgelöst von den Profilflächen behandeln lassen, während die Eingriffsverhältnisse aller andern Kurven der Profilflächen erst durch den benachbarten Flächenstreifen bestimmt sind.

Ich habe mich im wesentlichen auf die Behandlung der auftretenden geometrischen Fragen vom mathematischen Standpunkt aus beschränkt, doch ist z. B. die Frage, wie auf der mathematisch definierten Profilfläche die als Zahnflanke geeigneten Teile auszuwählen sind, im Anschluß an die Krümmung der abwickelbaren Profilflächen in Angriff genommen. Auf Fragen rein technischer Art, wie die Begrenzung der Räder im einzelnen, ist nicht eingegangen.

Rein geometrische bzw. kinematische Betrachtungsweise ist bevorzugt, weil eine rechnerische Darstellung der geometrischen Zusammenhänge in übersichtlicher Form kaum möglich ist. In den Fußnoten ist aber das Wichtigste der rechnerischen Ergebnisse, insbesondere wenn es sich um Integrationen handelt, in kürzester Form zusammengestellt.

**1. Das Nullsystem der Verzahnung.** Bei der räumlichen Verzahnung sind zwei Profilflächen $\Phi_1$ und $\Phi_2$, welche sich mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ um die beiden Radachsen $A_1$ und $A_2$ drehen, stets längs einer Kurve in Berührung. Sie möge kurz Berührungs- oder Eingriffslinie genannt werden. Von dem Fall der sogenannten Präzisionsverzahnung, wo die Berührung nur in einem Punkt stattfindet, soll hier überhaupt nicht die Rede sein. Man geht in der Regel von der Relativbewegung des einen Rades gegen das andere aus. Denkt man sich das zweite ruhend, dann ist $\Phi_2$ die Hüllfläche von $\Phi_1$. Irgend ein Punkt von $\Phi_1$, in welchem $\Phi_1$ gerade mit $\Phi_2$ in Berührung ist, muß sich also momentan in der Berührungsebene beider Flächen weiter bewegen.

Zu jedem Moment der Bewegung gehört ein Nullsystem mit der momentanen Schraubenachse als Zentralachse. In demselben ist jedem Punkt des Raumes die zur Bahntangente senkrechte Ebene zugeordnet.

---

[1]) a. a. O. S. 260.

[2]) Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 51, 1904, S. 51 und Werkstattechnik, Bd. 1, 1907.

[3]) Math. Ann., Bd. 69, 1910, S. 560.

[4]) Enzykl. der math. Wiss. III. D 4, S. 230.

Alle diese mit der Relativbewegung definierten Nullsysteme fallen bei der wirklichen Bewegung der Zahnräder in ein einziges zusammen, das Nullsystem der Verzahnung. Die Richtung der Zentralachse, die $M$ bezeichnet werden soll, findet man bekanntlich durch ein Dreieck, von dem zwei Seiten zu den Radachsen parallel und zu $\omega_1$ und $\omega_2$ proportional sind. Die dritte Seite ist dann zu $M$ parallel. Die kürzesten Abstände der Zentralachse von $A_1$ und $A_2$ verhalten sich wie $\operatorname{tg}(A_1 M) : \operatorname{tg}(A_2 M)$. Von der Relativbewegung soll jetzt nicht mehr die Rede sein, aber die Senkrechte auf jeder Ebene in ihrem Nullpunkt $p$ soll auch ferner noch als Bahntangente bezeichnet werden. Auch von der zu dem Nullsystem gehörigen Schraubung wird gelegentlich Gebrauch gemacht. Will man die Bahntangente eines Punktes $p$ ohne die Relativbewegung definieren, so muß man von den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ausgehen, welche der Punkt haben würde, wenn er mit dem ersten bzw. zweiten Radkörper gedreht würde. Die Bahntangente ist dann zu der Verbindungslinie der Endpunkte dieser beiden in $p$ angetragenen Geschwindigkeitsvektoren parallel. Der aus der Relativbewegung abgeleitete Hauptsatz der Verzahnung, daß die Bahntangenten der Punkte, welche augenblicklich im Eingriff sind, d. h. auf der Berührungskurve der Profilflächen liegen, Tangenten an diese Flächen sein müssen, sagt also im Grunde nichts anderes aus, als daß zwei sich berührende Profilflächenelemente die gleiche Normalgeschwindigkeit haben müssen. Da eine Nullinie, d. h. eine im Nullsystem zu sich selbst konjugierte Gerade und nur eine solche auf den Bahntangenten ihrer Punkte senkrecht steht, folgt aus dem genannten Hauptsatz, daß die gemeinschaftlichen Profilnormalen Nullinien sind.

Die beiden Radachsen sind zu einander konjugierte Gerade, weil die Bahntangenten der Punkte der einen senkrecht zur andern stehen. Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf einer Radachse liegt, geht eine bestimmte Gerade, welche die beiden Radachsen schneidet. Sie soll kurz Achsensekante des Punktes genannt werden. Dieselbe ist als Sekante zweier konjugierten Geraden eine Nullinie und steht daher senkrecht auf der Bahntangente des Punktes. Die Achsensekante steht auch senkrecht auf den beiden Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$. Jede Ebene des Raumes, welche nicht durch eine Radachse hindurchgeht, schneidet die Radachsen in Punkten, deren Verbindungslinie eine Nullinie ist und daher den Nullpunkt der Ebene enthält.

## I. Zahnräder mit abwickelbaren Regelflächen als Profilflächen.

**2. Die Berührungslinie der Profilflächen.** Sollen sich zwei abwickelbare Profilflächen in einer gemeinschaftlichen Berührungsebene $\varepsilon$ längs einer Geraden $E$ berühren, so müssen die Bahntangenten aller Punkte von $E$ in die Ebene $\varepsilon$ fallen. Die Eingriffsgerade muß also die Charakteristik der Ebene $\varepsilon$ bezüglich der zum Nullsystem gehörigen Schraubung sein. Von der Charakteristik $E$ der Ebene $\varepsilon$ gelten die bekannten Sätze: Die durch $E$ gehende auf $\varepsilon$ senkrecht stehende Ebene $\delta$ ist zur Zentralachse $M$ des Nullsystems parallel. Der Abstand dieser Ebene von $M$, also der kürzeste Abstand von $E$ und $M$ ist $h \operatorname{tg}(EM)$, wenn $h$ den Parameter der zum Nullsystem gehörigen Schraubung bedeutet; die Bahntangente des der Zentralachse nächstliegenden Punktes von $E$ fällt mit $E$ zusammen.

Satz 1: Bei Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen bleibt während der Bewegung die gemeinschaftliche Normalebene der Profilflächen immer zur Zentralachse des Nullsystems parallel und die Berührungslinie ist die Charakteristik der gemeinsamen Berührungsebene.

Beispiel. Die Aufgabe, das Gegenprofil zu einer ebenen Zahnflanke zu bestimmen, läßt sich schon jetzt lösen. Wir betrachten die Zahnräder in einem Moment, wo sie sich aus einer Anfangslage um die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gedreht haben, welche sich wie $\omega_1$ zu $\omega_2$ verhalten müssen und von jetzt ab kurz Drehungswinkel bezeichnet werden sollen. Die Eingriffsgerade $E$ ist die Charakteristik der Ebene, in welche momentan die ebene Zahnflanke fällt. Man braucht also nur $E$ nach den angegebenen Sätzen zu konstruieren, so erhält man eine Erzeugende der Eingriffsfläche, und diese dann um die Drehungswinkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ rückwärts zu drehen, um Erzeugende $E_1$ und $E_2$ der Profile in ihrer Anfangslage zu erhalten. $E_2$ beschreibt das gesuchte Gegenprofil $\Phi_2$, während die Geraden $E_1$ in der Ebene liegen, mit welcher $\Phi_1$ zu Anfang zusammenfiel. Sie können als die Linien gleichzeitigen Eingriffs auf $\Phi_1$ bezeichnet werden.

Die Eingriffsfläche hat einen kubischen Kreis als Doppelkurve. Es gehen nämlich durch jeden Punkt, dessen Bahntangente in die Spitze des Hüllkegels der Ebene $\Phi_1$ trifft, zwei Erzeugende, die Charakteristiken der den Punkt enthaltenden Berührungs-

ebenen an die Kegelfläche. Jeder Punkt gehört ja zur Charakteristik einer Ebene, wenn seine Bahntangente in dieselbe fällt. Die genannten Punkte bilden aber einen kubischen Kreis, über dessen Lage Schönflies, Geom. der Bew., S. 116, nachzusehen ist. Die Paare von Erzeugenden, welche sich auf der Doppelkurve schneiden, sind nur außerhalb des Kegels reell. Unten sollen noch ebene Schnitte der Eingriffsfläche dieses Beispiels betrachtet werden.

Besondre Punkte auf der Berührungslinie der Profilflächen sind die Berührungspunkte der Eingriffsfläche mit den Profilflächen. Die Berührungsebenen der Eingriffsfläche längs einer Erzeugenden $E$ bilden im allgemeinen ein Ebenenbüschel; eine derselben wird also mit der gemeinschaftlichen Berührungsebene der Profilflächen zusammenfallen. Die beiden Profilflächenelemente bewegen sich an einer solchen Stelle momentan in der Eingriffsfläche. Die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeiten verschwinden; $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ fallen in die Ebene $\varepsilon$. Daraus folgt aber, daß die gemeinschaftliche Normale $N$ der Eingriffsfläche und Profilflächen in einem solchen Punkt $q$ durch die beiden Radachsen geht. Daß der Schnittpunkt der Projektionen von $A_1$ und $A_2$ auf die Ebene $\varepsilon$ auf deren Charakteristik $E$ fällt, geht auch schon aus einem Satz über das Nullsystem hervor.[1])

Die Punkte der beschriebenen Art bilden auf der Eingriffsfläche eine Kurve $(q)$, deren Tangente in der Berührungsebene $\varepsilon$ liegt und $N$ senkrecht schneidet. Also gilt:

Die Eingriffsfläche wird von den Profilflächen beim Eingriff in den Punkten einer Kurve $(q)$ berührt, welche eine Orthogonaltrajektorie ihrer Achsensekanten ist.[2])

Solche Kurven, welche die Erzeugenden einer durch die Radachsen gehenden Regelfläche senkrecht schneiden, spielen auch späterhin eine bedeutsame Rolle. Dreht man sie um die Radachsen, so entstehen Drehungsflächen, welche sich längs der betreffenden Kurve berühren.

Die durch $E$ gehende Normalebene $\delta$ der Profilflächen enthält auch die zu $q$ gehörende Achsensekante $N$, weil $\delta$ und $N$ auf $\varepsilon$ senkrecht stehen. Da $\delta$ zu $M$ parallel ist, kann man eine Eingriffsfläche für abwickelbare Profilflächen konstruieren, wenn man eine Kurve $(q)$ kennt, welche ihre Achsensekanten senkrecht schneidet. Man muß nur durch jeden Punkt $q$ der Kurve die Achsensekante $N$ und die darauf senkrechte Ebene $\varepsilon$ legen und dann $N$ in der Richtung der Zentralachse $M$ auf $\varepsilon$ projizieren, um eine Erzeugende der Eingriffsfläche zu erhalten (Abb. 2b).

**3. Die Hüllfläche der Eingriffsberührungsebenen.** Die Erzeugende $E$ der Eingriffsfläche $(E)$ ergab sich als Schnittlinie der zu einander senkrechten Ebenen $\delta$ und $\varepsilon$. Weil die Normalebene $\delta$ stets zu $M$ parallel bleibt, umhüllt sie eine Zylinderfläche $(\delta)$, welche außer den Eingriffsgeraden $E$ auch die Normalen $N$ zu Tangenten hat. Die Zylindererzeugende sei $L$. Wir führen auch noch die abwickelbare Regelfläche $(\varepsilon)$ ein, welche von den Berührungsebenen $\varepsilon$ der Profilflächen umhüllt wird. Da jede Ebene $\varepsilon$ die Eingriffsfläche in einem Punkt $q$ berührt, müssen sich $(\varepsilon)$ und $(E)$ längs der Kurve $(q)$ berühren. Die Erzeugende von $(\varepsilon)$, welche mit $Q$ bezeichnet werden soll, geht somit durch $q$. Denkt man sich die Ebenen $\delta$ und $\varepsilon$ starr verbunden, dann kann man sich die Eingriffsfläche kinematisch als Bahnfläche der Schnittlinie der starr verbundenen Ebenen entstanden denken, wenn man diese an den Flächen $(\delta)$ und $(\varepsilon)$ berührend hingleiten läßt. Die Normalebenen auf $\delta$ und $\varepsilon$ in den Erzeugenden $L$ und $Q$ schneiden sich in der Polgeraden $P$. (Die letztere der beiden Ebenen ist die Zentralebene von $N$, weil $Q$ auf zwei benachbarten Erzeugenden von $(N)$ senkrecht steht.) Durch $P$ ist insbesondere das Normalenparaboloid der Eingriffsfläche längs $E$ bestimmt. Die Polgerade $P$ hat für die unten untersuchte Krümmung der Profilflächen eine wichtige Bedeutung.

Nun sind die Flächen $(\delta)$ und $(\varepsilon)$ nicht von einander unabhängig. Denn der Abstand der Ebene $\delta$ von $M$ war $h$ tg $(EM)$, also durch die Neigung von $\varepsilon$ gegen $M$ bestimmt. Führt man den Richtungskegel von $(\varepsilon)$ ein, so kann man den geometrischen Zusammenhang mit $(\delta)$ so ausdrücken:

Satz II: Eine zu $M$ senkrechte Ebene, welche von der Spitze des Richtungskegels von $(\varepsilon)$ den Abstand $h$ hat, schneidet diesen und die Zylinderfläche $(\delta)$ in kongruenten Kurven, welche senkrecht zu einander orientiert sind.

---

[1]) Schönflies, Geom. der Bewegung, Leipzig 1886, S. 104.

[2]) In einem Koordinatensystem sei $A_1$ die $z$-Achse, während $A_2$ durch die Gleichungen $x=a$, $y=z \operatorname{tg} \alpha$ bestimmt sein soll. Dann muß die Kurve $(q)$ der Differentialgleichung genügen:

$$(x-a)(x\,dx+y\,dy)+(xz-a\,y\operatorname{ctg}\alpha)\,dz=0.$$

Diese Sätze mögen auf das Beispiel angewendet werden, wo die eine Zahnflanke eben ist (s. unter 2). In diesem Fall ist ($\varepsilon$) ein Kreiskegel um $A_1$, also ($\delta$) nach dem Satz II eine Zylinderfläche zweiter Ordnung. Aus der kinematischen Erzeugung der Eingriffsfläche durch ein starrverbundenes Orthogonalebenenpaar kann man folgern, daß die zu $M$ senkrechten Schnitte Fußpunktkurven von unter sich ähnlichen Kegelschnitten sind, deren Pole auf der oben angegebenen Doppelkurve der Eingriffsfläche liegen. Die Spuren der Ebenen $\delta$ und $\varepsilon$ in einer beliebigen zu $M$ senkrechten Schnittebene stehen nämlich senkrecht auf einander und berühren zwei ähnliche Kegelschnitte in entsprechenden Punkten. Wenn aber die Schenkel eines rechten Winkels zwei ähnliche Kurven $C'$ und $C''$ in entsprechenden Punkten berühren, beschreibt die Spitze des Winkels die Fußpunktkurve einer zu $C'$ und $C''$ ähnlichen Kurve $C$.[1])

Es gibt auch noch andere Fälle, bei denen die gemeinschaftliche Berührungsebene der Profilflächen stets durch einen festen Punkt $s$ geht, dieselbe also eine Kegelfläche ($\varepsilon$) umhüllt. Wieder ist der kubische Kreis eine vielfache Kurve der Eingriffsfläche, für dessen Punkte die Bahntangente durch $s$ geht und auch die Betrachtung über die zu $M$ senkrechten Schnitte der Eingriffsfläche läßt sich auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Aber die Bestimmung der Kurve ($q$) bietet Schwierigkeiten. Man kann leicht eine Fläche angeben, auf welcher sie verlaufen muß, nämlich den Ort der Fußpunkte, in welchen die Lote aus $s$ die gemeinsamen Sekanten von $A_1$ und $A_2$ treffen[2]). Zur vollständigen Bestimmung von ($q$) ist die Eigenschaft der Kurve, ihre Achsensekanten senkrecht zu schneiden, zu benutzen.

Ein weiterer geometrischer Zusammenhang der Regelfläche ($\varepsilon$) mit der Fläche ($N$) der Achsensekanten soll unten dargelegt werden.

**4. Die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich der Drehung um die Radachsen.** Zwei benachbarten Erzeugenden $E$ und $E'$ der Eingriffsfläche entsprechen auf der Profilfläche $\Phi_1$ zwei Erzeugende $E_1$ und $E'_1$, welche sich in einem Punkt der Rückkehrkurve schneiden. Wenn man diesen Punkt um $A_1$ dreht, entsteht ein Kreis, der durch $E$ und $E'$ gehen muß. Ist $r_1$ sein Schnittpunkt mit $E$, dann geht die Normale der Eingriffsfläche in $r_1$ durch $A_1$, ganz wie dies im Punkt $q$ der Fall ist. Weitere Punkte derselben Eigenschaft können auf $E$ nicht existieren, weil das Normalenparaboloid längs $E$ die Radachse $A_1$ nur in zwei Punkten schneidet, und daß $r_1$ nicht etwa stets mit $q$ zusammenfällt, zeigt sich unten.

Der Ort ($r_1$) des Punktes $r_1$ bildet mit ($q$) zusammen die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich einer Drehung um $A_1$. Während aber ($q$) zugleich auch der Charakteristik bezüglich der zweiten Radachse angehört, ist dies bei ($r_1$) im allgemeinen nicht der Fall.

Durch Drehung der Eingriffsfläche um die erste Radachse entstehen zwei Hüllflächen $\Delta_{q_1}$ und $\Delta_{r_1}$. Die erstere berührt die Eingriffsfläche sowie die entsprechende Drehungsfläche $\Delta_{q_2}$ um $A_2$ längs ($q$) und die Profilfläche $\Phi_1$ längs einer Kurve ($q_1$), die letztere berührt die Eingriffsfläche längs ($r_1$) und enthält die Rückkehrkurve von $\Phi_1$. Aus den Drehungsflächen $\Delta_{q_1}$ und $\Delta_{r_1}$ kann man sich die abwickelbare Profilfläche $\Phi_1$ erzeugt denken, indem man eine Gerade auf $\Delta_{r_1}$ abrollen und dabei $\Delta_{q_1}$ berühren läßt.

Beispiel: Eine räumliche Zykloidenverzahnung. Ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Erzeugende $N$ die beiden Radachsen schneiden und eine Richtungsebene haben, welche zum gemeinsamen Lot der Radachsen parallel ist, ist gleichseitig. Auf dem Paraboloid liegt eine Gerade, welche alle Erzeugenden $N$ senkrecht schneidet, also die den Kurven ($q$) charakteristische Eigenschaft besitzt. Weil die abwickelbare Fläche ($\varepsilon$) in diesem Fall in ein Ebenenbüschel durch die Gerade ausartet, kann sie auch mit $Q$ bezeichnet werden. Aus dem Satz II folgt, daß auch die Zylinderfläche ($\delta$) in ein Ebenenbüschel durch eine Gerade $L$ ausartet, welche mit Hilfe dieses Satzes zu konstruieren ist. Da $L$ alle durch $Q$ gehenden Achsensekanten $N$ treffen muß, gehören $A_1$ $A_2$ $Q$ $L$ zu den Erzeugenden der zweiten Schar des hyperbolischen Paraboloids ($N$).

---

[1]) Zum Beweis dient der Satz: Wenn man durch die Punkte einer Fußpunktkurve der beliebigen Kurve $C$ Gerade legt, welche mit den Tangenten von $C$ einen konstanten Winkel $\alpha$ bilden, so umhüllen sie eine zu $C$ ähnliche Kurve $C'$. Haben nämlich die Tangenten von $C$ vom Pol den Abstand $p$, der in Funktion des Richtungswinkels $\varphi$ der Normalen von $C$ gegen eine feste Anfangsrichtung gegeben sein möge (magische Gleichung von $C$), dann haben die Tangenten von $C'$ vom Pol den Abstand $p' = p(\varphi) \cos \alpha$.

[2]) Diese Fläche dritter Ordnung besitzt zwei Kreisscharen, gehört also zu den von E. Königs C. R. Paris 109 (1889) S. 364 behandelten Flächen und ist im Fall senkrecht gekreuzter Radachsen eine parabolische Zyklide.

Die Eingriffsfläche ist als Erzeugnis zweier orthogonaler Ebenenbüschel ($\varepsilon$) und ($\delta$) ein orthogonales Hyperboloid, d. h. die Kreisschnitte desselben stehen senkrecht zu $Q$ und $L$ [1]).

Durch Drehung von $Q$ um $A_1$ entsteht das Drehungshyperboloid $\varDelta_{q_1}$, welches das entsprechende Drehungshyperboloid $\varDelta_{q_2}$ um $A_2$ längs $Q$ berührt.

Um zu den Profilflächen der Verzahnung zu gelangen, kann man mit Vorteil von der auch praktisch wichtigen Eigenschaft der Eingriffsfläche Gebrauch machen, daß hier wie bei Stirnrädern zwei beliebige von unendlich vielen Zahnrädern auf dem orthogonalen Hyperboloid zum Eingriff gelangen können. Als Radachsen kann man nämlich zwei beliebige Erzeugende der zweiten Schar des hyperbolischen Paraboloids ($N$) wählen. Festgehalten wird dabei außer dem Paraboloid die Richtung der Zentralachse des Nullsystems. Es ist leicht zu sehen, daß man zu derselben Eingriffsfläche gelangt, wie auch die Radachsen auf dem Paraboloid gewählt werden mögen. Insbesondere kann die eine Radachse mit $Q$ selbst zusammenfallen. Weil dann alle Erzeugenden $E$ der Eingriffsfläche durch diese Radachse gehen, muß die zugehörige Profilfläche eine Ebene sein. Denn nur so kann sie außer den Erzeugenden noch eine weitere Gerade enthalten. Auch die in der Ebene liegende Rückkehrkurve läßt sich angeben. Weil nämlich die Normalen des orthogonalen Hyperboloids längs $L$ alle durch $Q$ gehen, ist $L$ die Eingriffslinie ($r_1$) der Rückkehrkurve, und diese selbst die Meridianhyperbel des Hyperboloids $\varDelta_{l_1}$, welches durch Drehung von $L$ um $Q$ entsteht.

Jetzt lassen sich aber die Profilflächen beliebiger Räder des Satzes aus der Eingriffsfläche als Gegenprofile von ebenen Radialflanken mittels der Proportionalität entsprechender Drehungswinkel herleiten.

Zur Charakterisierung der Verzahnung möge der einfache Sonderfall dienen, wo $Q$ und $L$ parallel sind. Man erhält dann einen Satz von Stirnrädern mit Zykloidenverzahnung. Indessen lassen sich Raumverzahnungen, welche zur ebenen Zykloidenverzahnung analog sind, in ganz verschiedener Richtung finden.

**5. Graphische Integration zur Bestimmung einer Profilfläche.** Die Bestimmung der Profilfläche aus der Eingriffsfläche erfordert eine Integration, deren Ergebnis in dem unter **4** beschriebenen Beispiel sich durch eine einfache geometrische Betrachtung vorhersehen ließ. Zur rechnerischen Durchführung sei auf die von Herrn M. Disteli in Zeitschr. für Math. und Phys. 56 (1908), S. 246 für konische Räder gemachten Entwicklungen hingewiesen, insbesondere auf das in den Gleichungen (25) enthaltene Ergebnis, welches fast unmittelbar auf den Fall der Hyperboloidräder mit abwickelbaren Profilen sich übertragen läßt. Ist nämlich die entsprechende konische Verzahnung bekannt, so ist, wie unter **7** gezeigt wird, keine Integration mehr nötig.

Im Anschluß an **4** möge schon hier eine Bestimmung der Profilfläche durch graphische Integration Platz finden, obwohl sie die Kenntnis der Kurve ($r_1$) auf der Eingriffsfläche zur Voraussetzung hat, in welcher die Rückkehrkurve von $\Phi_1$ zum Eingriff kommt. Zu dieser Kurve ($r_1$) gelangt man nach den unter **6** und **7** gemachten Ausführungen.

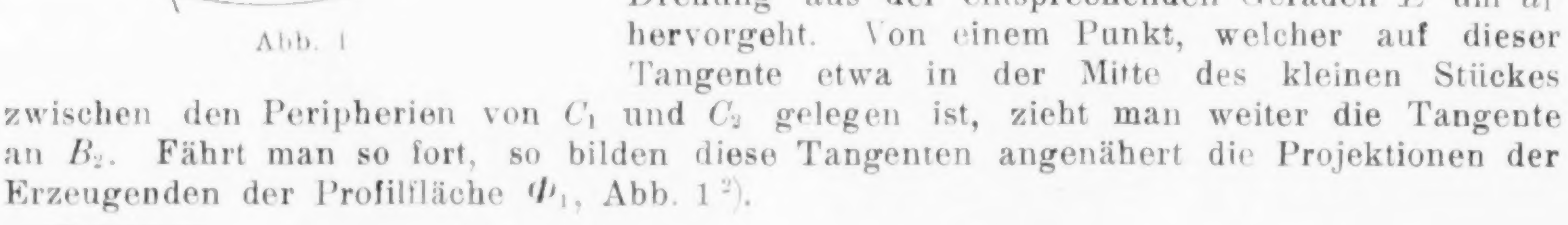



Abb. 1

Seien $a_1'$ $E'$ $r_1'$ die Projektionen von $A_1$ $E$ $r_1$ auf eine zu $A_1$ senkrechte Zeichenebene, dann benutzen wir zwei Scharen von Kreisen um denselben Mittelpunkt $a_1'$, von denen die eine die Geraden $E$ berührt, während die andere durch die Punkte $r_1$ geht. Sind eine große Zahl dieser Kreise gezeichnet und paarweise gleich beziffert, also etwa mit $B_1$ $B_2$ $B_3$ . . . und $C_1$ $C_2$ $C_3$ . . . bezeichnet, so beginnt man mit der Integration an einer beliebigen Stelle von $C_1$ und zieht diejenige Tangente an den Kreis $B_1$, welche durch Drehung aus der entsprechenden Geraden $E$ um $a_1'$ hervorgeht. Von einem Punkt, welcher auf dieser Tangente etwa in der Mitte des kleinen Stückes zwischen den Peripherien von $C_1$ und $C_2$ gelegen ist, zieht man weiter die Tangente an $B_2$. Fährt man so fort, so bilden diese Tangenten angenähert die Projektionen der Erzeugenden der Profilfläche $\Phi_1$, Abb. 1 [2]).

[1]) Vergl. hierzu Schönflies, Geometrie der Bewegung, S. 112.

[2]) Diese graphische Integration ist auch zur Herstellung der Profilkurven aus der Eingriffslinie bei Stirnradverzahnung gut brauchbar.

Sind die beiden Profilflächen nach diesem Verfahren angenähert konstruiert, dann bildet die Proportionalität entsprechender Drehungswinkel $\psi_1$ und $\psi_2$ ein geeignetes Mittel zur Prüfung der Genauigkeit. An Stellen, wo die eine Profilfläche sich nach dem Verfahren nicht genau genug ergibt, wird man die andere bevorzugen.

Von einer ganz beliebigen Drehungsfläche $\Delta_{\varphi_1}$ um die Radachse $A_1$ ausgehend gelangt man auf folgende Weise zu einer Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen. Man bestimmt zuerst die auf $\Delta_{\varphi_1}$ liegende Kurve $(q)$, und zwar ergeben sich auf jedem Parallelkreis zwei Punkte der Kurve. Man hat nur die Spitze des zu dem Parallelkreis gehörigen Normalenkegels mit $A_2$ durch eine Ebene zu verbinden und diese mit dem Parallelkreis zum Schnitt zu bringen. Die Normalen der beiden Schnittpunkte gehen dann durch $A_1$ und $A_2$; sie gehören also zur Regelfläche $(N)$. Durch Projektion von $N$ auf die zugehörige Berührungsebene $\varepsilon$ von $\Delta_{\varphi_1}$ in der Richtung von $M$ ergibt sich $E$ und aus der Eingriffsfläche $(E)$ durch das beschriebene Integrationsverfahren die abwickelbaren Profilflächen.

**6. Krümmung der Profilflächen.** Die Profilfläche $\Phi_1$ wird längs $E$ von einem Kreiskegel oskuliert, dessen Achse $R_1$ in der Normalebene $\delta$ liegt. Zu deren Bestimmung benutzen wir, daß sie allen Parallelflächen von $\Phi_1$ gemeinsam ist. Die Spitzen der oskulierenden Kegelflächen liegen auf den Rückkehrkurven der Parallelflächen.

Verschiebt man alle Eingriffsgeraden $E$ parallel zu sich selbst längs der gemeinsamen Profilnormalen um eine konstante Strecke bis $E'$, so entsteht eine neue Eingriffsfläche $(E')$, auf welcher zwei Parallelflächen von $\Phi_1$ und $\Phi_2$ zum Eingriff gelangen. In irgend einem Moment ist dann je ein Punkt der Rückkehrkanten von $\Phi_1$ und ihrer Parallelfläche im Punkt $r_1$ von $E$ bzw. $r_1'$ von $E'$ im Eingriff. Diese Punkte $r_1$ und $r_1'$ sind eben die Spitzen der oskulierenden Kreiskegel, $R_1$ ist daher ihre Verbindungslinie. Wie früher gezeigt wurde, gehen die Normalen der Eingriffsflächen $(E)$ und $(E')$ in $r_1$ und $r_1'$ durch $A_1$. Nun läßt sich zeigen, daß die Polgerade $P$ den beiden Eingriffsflächen gemeinsam ist. Dieselbe liegt einerseits auf der zu $\delta$ in $L$ senkrecht stehenden Ebene, andererseits in der Zentralebene von $N$. Diese Ebenen sind aber den beiden parallelen Verzahnungen gemeinsam. Die Normalen von $(E)$ in $r_1$ und von $(E')$ in $r_1'$ gehen somit beide sowohl durch $A_1$ wie durch $P$ und stehen senkrecht auf $E$. Sie sind daher Erzeugende eines durch $A_1$ und $P$ gehenden Paraboloids, welches eine zu $E$ senkrechte Richtungsebene hat. Dieses Paraboloid enthält auch die Gerade $N$ als Erzeugende. Sein vollständiger Schnitt mit der Profilnormalebene $\delta$ muß durch $N$ und $r_1 r_1'$, d. h. $R_1$ gebildet werden. Zur Konstruktion von $R_1$ suche man zuerst den Schnittpunkt mit $L$. Das Lot auf $\delta$ in diesem Punkt ist eine Erzeugende des Paraboloids und muß durch $P$ und $A_1$ gehen. Man hat also nur die Projektion von $A_1$ auf $\delta$ mit $L$ zum Schnitt zu bringen (Abb. 2b). Die Richtung von $R_1$ ergibt sich sehr einfach mittels der sphärischen Abbildung, welche unten besprochen wird.

Früher war von der Möglichkeit des Zusammenfallens der Punkte $q$ und $r$ die Rede. Man sieht jetzt, daß ein solches in jedem Bewegungsmoment für eine einzige der Parallelflächen von $\Phi_1^*$ eintritt, nämlich im Schnittpunkt von $N$ und $R_1$. Daß $q$ mit $r_1$ auch dauernd zusammenfallen kann, zeigt eine unten beschriebene Verzahnung, bei der ein Kegelrad mit einem Hyperboloidrad zum Eingriff kommt.

Für die Achsen $R_1$ und $R_2$ der Kreiskegel, welche die beiden Profilflächen längs $E$ oskulieren, läßt sich noch ein einfacher geometrischer Zusammenhang nachweisen, der die eine aus der andern herzuleiten gestattet.

Die Charakteristik der Normalebene $\delta$ der Profilflächen im Nullsystem, welche mit $D$ bezeichnet werden soll, ist die Projektion von $M$ auf $\delta$. Es soll gezeigt werden, daß sich $R_1$ und $R_2$ auf $D$ schneiden. Zu den durch $A_1$, $A_2$ und $D$ gehenden Geraden gehört $N$, ferner eine Senkrechte zu $\delta$[1]), sie besitzen daher eine zu $E$ senkrechte Richtungsebene, weil die genannten Geraden zu $E$ senkrecht gerichtet sind. Daß die Geradenschar ein Paraboloid bildet, folgt ja daraus, daß $D$ ebenso wie $M$ mit $A_1$ und $A_2$ zu einer Ebene parallel ist. Eine zu $E$ senkrechte Richtungsebene haben auch die Paraboloide durch $A_1\ R_1\ P$ und $A_2\ R_2\ P$. Daraus läßt sich folgern, daß die drei Paraboloide außer der Geraden $N$ noch eine zweite Gerade $N'$ gemeinsam haben. Denn die beiden durch die vier Geraden $A_1\ A_2\ P$ und $D$ gehenden Sekanten $N$ und $N'$ müssen als Erzeugende des ersten Paraboloids zu der genannten Richtungsebene parallel sein und

[1]) Schönflies, Geom. der Bewegung, S. 104.

gehören somit auch den beiden andern Paraboloiden an. Die drei Geraden $R_1$ $R_2$ und $D$ müssen also von $N'$ getroffen werden. Da sie sämtlich in $\delta$ liegen, ist dies nur in einem und demselben Punkt möglich, falls nicht etwa $N'$ selbst in $\delta$ liegt. Dann müßten sich aber $N$ und $N'$ schneiden und $A_1$ und $A_2$ in einer Ebene liegen.

Damit ist gezeigt, daß sich $R_1$ und $R_2$ mit der Projektion der Zentralachse $M$ auf die Normalebene $\delta$ in einem Punkte schneiden.

Daraus folgt z. B., daß $r_1$ und $r_2$ nur zusammenfallen können in dem $M$ nächstgelegenen Punkt von $E$.

Die Krümmungsverhältnisse der Profilflächen geben für die Auswahl der Teile einen Anhaltspunkt, welche als Arbeitsflanken verwendet werden können, ohne daß Ueberschneidungen zu befürchten sind, wenn auch zur endgültigen Lösung dieser Frage in jedem einzelnen Fall besondere Untersuchungen nötig sind.

Wenn in der gemeinschaftlichen Normalebene $\delta$ der Profilflächen die Achsen der beiden Oskulationskegel bestimmt sind, so trifft ein Lot von ihrem Schnittpunkt auf die Berührungslinie $E$ diese in einer Stelle $k$, wo die Profilflächen die gleiche Krümmung besitzen, dieselben sich also im allgemeinen überschneiden müssen. Ferner wird durch die Schnittpunkte $r_1$ und $r_2$ der Kegelachsen mit $E$ ein Teil von $E$ abgegrenzt, wo die Profilflächen ihre konvexen Seiten gegeneinander kehren. Dies tritt in dem zwischen bzw. außerhalb $r_1$ $r_2$ liegendem Gebiet von $E$ ein, je nachdem $k$ außerhalb bzw. zwischen $r_1$ $r_2$ gelegen ist. Diese Teile wird man zur praktischen Verwendung als Zahnflanken bevorzugen.[1])

Ein zu nahes Herangehen an die Rückkehrkurven, also an $r_1$ und $r_2$, oder gar ein Ueberschreiten derselben verbietet sich von selbst.

Auch der Fall, wo die beiden Achsen der Oskulationskegel zusammenfallen, die Profilflächen sich daher längs $E$ oskulieren, kann eintreten. Die notwendige Bedingung hierfür ist, daß die Paraboloide durch $A_1$ $R_1$ $P$ und $A_2$ $R_2$ $P$ zusammenfallen. Wenn aber $P$ und $R_1$ mit $A_1$ und $A_2$ paraboloidische Lage haben sollen, so müssen sie zur gemeinsamen Normale von $A_1$ und $A_2$ senkrecht gerichtet sein.

Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn $P$ mit $L$ zusammenfällt, artet das Normalenparaboloid längs $E$ in eine Ebene aus, die mit $\delta$ zusammenfällt. $E$ ist eine Torsallinie der Eingriffsfläche. Die Profilflächen oskulieren längs $E$ denselben Kreiskegel, dessen Achse $L$ ist. Solche Stellen sind praktisch nicht verwendbar.[2])

Wenn dagegen $P$ und $L$ nicht zusammenfallen, muß die Ebene durch $P$ und $L$ zu $A_1$ und $A_2$, die zu ihr senkrechte Ebene $\delta$ also zum gemeinsamen Lot von $A_1$ und $A_2$ parallel sein. Die Kegelachsen $R_1$ und $R_2$ sind dann im allgemeinen zu einander parallel und fallen nur zusammen, wenn eine Richtungsebene des hyperbolischen Paraboloids durch $A_1$ $A_2$ und $P$ senkrecht zu $E$ steht. Bei diesem Ausnahmefall geht das Paraboloid durch die Projektion $D$ von $M$ auf $\delta$ (Schönflies S. 104); also müssen $R_1$ und $R_2$ beide mit $D$ zusammenfallen. Diese Ausnahme wird aber im allgemeinen gar nicht eintreten, sondern nur der Fall paralleler Oskulationskegelachsen, welcher der Verzahnung kein Hindernis bietet. Die Bedeutung dieser Tatsache tritt erst zutage, wenn man den entsprechenden Fall bei der zylindrischen und konischen Verzahnung betrachtet, nämlich den Durchgang des Eingriffs durch die zur Ebene der Radachsen senkrechte Ebene, welche die beiden Teilzylinder bzw. Teilkegel berührt. Dieser Durchgang wird immer in der Berührungslinie bewerkstelligt, weil sich beim Durchgang an anderen Stellen die Profilflächen oskulieren würden.[3]) Bei der Raumverzahnung liegen die Verhältnisse also viel günstiger und wenn man die Bedingung aufstellt,[4]) daß die Eingriffsfläche durch die Zentralachse $M$ gehen soll, so ist eine solche Uebertragung einer Einschränkung, welche für Stirn- und Kegelräder notwendig ist, auf den analogen räumlichen Fall nicht berechtigt.

[1]) Vgl. J. Pützer, Ueber den spiraloiden Eingriff. Zeitschr. d. V. D. I., 1860, S. 234.

[2]) Für parallele Radachsen erhält man entsprechend solche Fälle, wo die Normalebene des Eingriffszylinders durch die Berührungslinie $M$ der Teilkreiszylinder geht. Vgl. meine Abhandlung: Die Zahnform des Stirnrades mit längster Lebensdauer. Der Betrieb, 1920/21, S. 419.

[3]) S. meine soeben genannte Abhandlung, S. 419.

[4]) M. Disteli, a. a. O., S. 264 und H. Resal, Paris C. R. 117 (1893), S. 393.

Man verzichtet überhaupt bei räumlichen Verzahnungen am besten auf die Unterscheidung eines Kopf- und Fußprofils, eine solche wäre meist nur auf künstliche Weise zu bewerkstelligen.[1])

**7. Die sphärische Abbildung.** Wie schon eingangs erwähnt, läßt sich jeder Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen eine konische Verzahnung zuordnen, bei welcher die Richtungskegel von $\Phi_1$ und $\Phi_2$ die Profile der Kegelräder sind. Dabei müssen sie sich um Achsen $A_1^0$ und $A_2^0$ drehen, welche zu $A_1$ und $A_2$ parallel laufen, und sie berühren sich in jedem Moment in einer Ebene $\varepsilon^0$ längs einer Geraden $E^0$, welche zu $\varepsilon$ und $E$ parallel sind. Allen Parallelen zu $M$, also z. B. der Geraden $L$, entspricht dieselbe Gerade $M^0$. Die Charakteristik $E^0$ bestimmt man hier auf der Ebene $\varepsilon^0$, indem man diese mit der durch $M^0$ gehenden Normalebene $\delta^0$ zum Schnitt bringt.

Diese sphärische Abbildung eignet sich nicht bloß zu theoretischen Untersuchungen, sondern ganz besonders auch zur Ausführung von Konstruktionen, wie die Bestimmung von $P\,R_1\,R_2$, deren Richtung sich einfach in der Abbildung ergibt.

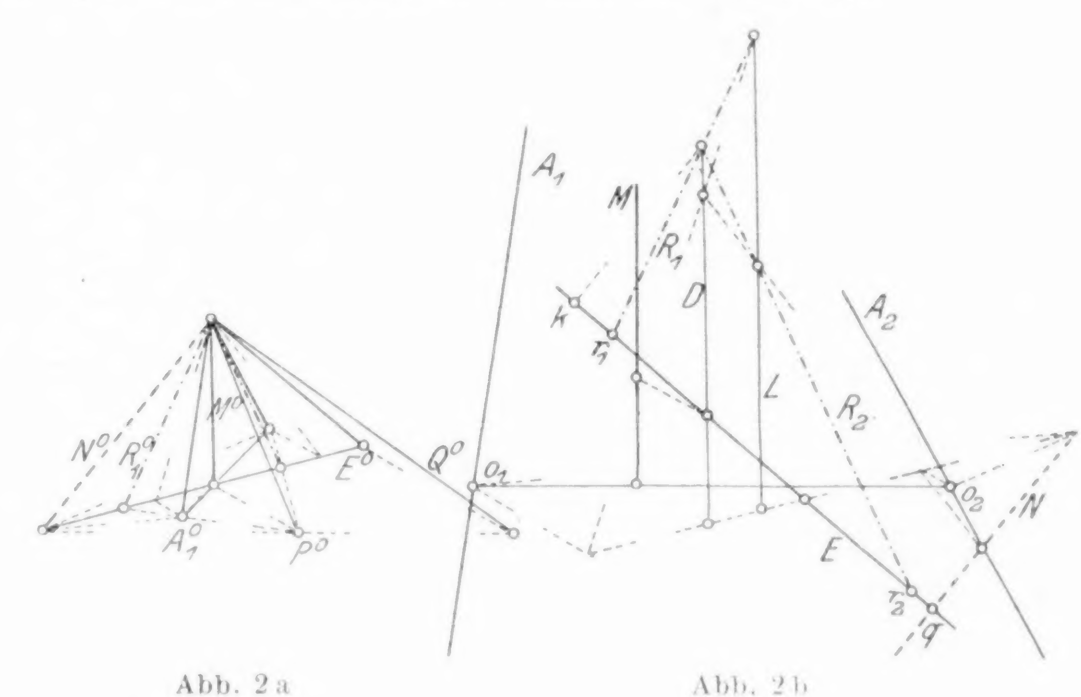


Abb. 2a Abb. 2b

Wir führen außer der Bildkugel eine zu $M^0$ senkrechte Bildebene ein. Wählt man den Abstand vom Fixpunkt der konischen Verzahnung gleich dem Parameter $h$ des Nullsystems, so erreicht man nach Satz II zugleich, daß die Spur des Kegels $(\varepsilon^0)$ in der Bildebene mit dem Normalschnitt des Zylinders $(\delta)$ übereinstimmt; die Tangenten der beiden kongruenten Kurven in entsprechenden Punkten sind dabei zu einander senkrecht.

Ueber die Spuren der Richtungskegel in dieser Bildebene gilt: Die Spur von $(E^0)$ ist die Fußpunktkurve der Spur von $(\varepsilon^0)$. Die Spuren der Kegel $(E^0)$ und $(N^0)$ sind inverse Kurven.

$P^0$ wird als Schnittlinie der Ebene $[Q^0\,N^0]$ und der auf $\delta^0$ in $M^0$ senkrecht stehenden Ebene konstruiert (Abb. 2a). $R_1^0$ ergibt sich dann in $\delta^0$ als Schnitt mit der Ebene $P^0\,A_1^0$.[2]) Nach Konstruktion der Richtungen $P^0\,R_1^0\,R_2^0$ können die Parallelen $P\,R_1\,R_2$ leicht gefunden werden (Abb. 2b), da man ihre Schnittpunkte mit $L$ kennt ($P$ ist in Abb. 2b nicht eingezeichnet).

Um Konstruktionen über konjugierte Gerade z. B. $A_1$ und $A_2$ auszuführen, benützt man die Bahntangenten $T_1$ und $T_2$ der $M$ nächstgelegenen Punkte $o_1$ und $o_2$ von $A_1$ und $A_2$. Zieht man in der Ebene $[A_1^0\,A_2^0]$ die Senkrechten $T_2^0$ und $T_1^0$ zu $A_1^0$ und $A_2^0$, so sind die Abstände der Bildspuren dieser Senkrechten von $M^0$ gleich den kürzesten Abständen der Geraden $A_2$ und $A_1$ von $M$.

Auch auf eine bequeme Konstruktion von $N$ aus $N^0$ sei hingewiesen. Durch die Schnittpunkte einer beliebigen zu $M$ senkrechten Ebene mit den Radachsen muß man Parallelen zu den Bildspuren von $A_1^0\,N^0$ und $A_2^0\,N^0$ ziehen, um einen Punkt von $N$ zu erhalten. (Abb. 2a und b.)

An die sphärische Abbildung schließt sich die Aufgabe an, Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen aus einer konischen Verzahnung abzuleiten. Es möge ein

[1]) D. Tessari, Torino, Annali del R. Museo industr. 2 (1871), S. 567. Als Ausnahmen können Verzahnungen mit Satzeigenschaft gelten wie die einfachsten Verzahnungen mit windschiefen Profilflächen (Disteli, Z. f. M. 1904) und die unter 4. beschriebene Zykloidenverzahnung, bei der man aus zwei beliebigen auf verschiedene Seiten von $L$ gewählten Lagen der Geraden $Q$ Kopf- und Fußprofile herleiten kann. Doch ist dabei zu beachten, daß die Grenzkurven zwischen Kopf- und Fußprofil nicht auf der Zentralachse $M$, sondern auf der zu ihr parallelen Geraden $L$ zum Eingriff kommen.

[2]) Vgl. hierzu M. Disteli, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56 (1908), S. 243.

allgemein giltiger Satz über die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Regelfläche vorausgeschickt werden, der eine wichtige geometrische Beziehung zwischen den Regelflächen $(N)$ und $(\varepsilon)$ ergibt:

Satz III: Wenn man durch die Punkte einer Kurve, welche die Erzeugenden $N$ einer Regelfläche senkrecht schneidet, die Normalebenen $\varepsilon$ zu $N$ legt, umhüllen diese die Tangentenfläche einer geodätischen Linie auf der abwickelbaren Fläche, welche von den Zentralebenen $\gamma$ der Erzeugenden $N$ umhüllt wird.[1]

Um die Richtigkeit des Satzes einzusehen, beachte man, daß die Erzeugende $Q$ von $(\varepsilon)$ als Schnittlinie zweier benachbarter Ebenen $\varepsilon$ auf zwei benachbarten Normalen $N$ senkrecht steht und also eine Parallele zu ihrem Striktionsstrahl ist und in der Zentralebene $\gamma$ von $N$ liegt. Weil $Q$ in $\gamma$ liegt, verläuft die Hüllkurve von $Q$, d. h. die Rückkehrkurve von $(\varepsilon)$ in der Hüllfläche von $\gamma$. Die Schmiegungsebene der Hüllkurve von $Q$ ist $\varepsilon$; sie steht auf $\gamma$ senkrecht, weil sie zu $N$ normal ist.

Den sämtlichen Orthogonaltrajektorien von $(N)$ entspricht eine Schar geodätischer Parallelen auf der Hüllfläche $(\gamma)$ der Zentralebenen und $(\gamma)$ ist die gemeinsame Fläche der Hauptkrümmungszentra für die durch die Orthogonaltrajektorien gehenden abwickelbaren Flächen $(\varepsilon)$.

Einfache Beispiele sind die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden eines Drehungshyperboloids und eines hyperbolischen Paraboloides. Sie liegen dem Satz zufolge auf der Tangentenfläche einer gemeinen Schraubenlinie bzw. einer auf einem parabolischen Zylinder verlaufenden Schraubenlinie.

Kennt man die Profilflächen und den Eingriffskegel einer konischen Verzahnung, so kann man eine Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen bei gekreuzten Radachsen daraus herzuleiten versuchen. Man hat nach dem oben angegebenen Verfahren aus dem Richtungskegel $(N^0)$ die Regelfläche $(N)$ durch $A_1$ und $A_2$ abzuleiten und dann eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden von $(N)$ zu suchen. Dazu ist freilich eine Integration nötig, deren Ergebnis sich aber manchmal mit Hilfe des Satzes III voraus sehen läßt.

a) Als erstes Beispiel wählen wir die sphärische Evolventenverzahnung, bei welcher die Eingriffslinie ein durch $M^0$ gehender Großkreis ist. Da $E^0$ ebenso wie $N^0$ in der Eingriffsebene durch $M^0$ bleibt, müssen $(E)$ und $(N)$ je eine zu ihr parallele Richtungsebene haben, zu welcher daher auch die Normalebene $\delta$ parallel bleibt. Es ist also $(N)$ ein durch die Radachsen gehendes hyperbolisches Paraboloid. Die Zentralebenen der Erzeugenden $N$ stehen senkrecht zur Richtungsebene und umhüllen einen parabolischen Zylinder. In einer Projektion auf die Richtungsebene erscheinen also die Erzeugenden $N$ als Tangenten einer Parabel; eine Orthogonaltrajektorie dieser Tangenten, d. h. eine Parabelevolvente, ist die Projektion von $(q)$, und die Tangenten dieser Parabelevolvente sind schließlich die Projektionen der Eingriffsgeraden $E$. Damit ist die Konstruktion der Eingriffsfläche gekennzeichnet. Zur Bestimmung der Profilflächen braucht man die sphärische Abbildung, in der die Profilkurven sphärische Kreisevolventen sind[2]. Die Drehungswinkel $\psi_1$ und $\psi_2$ sind dieser sphärischen Verzahnung zu entnehmen und damit aus jeder Eingriffsgeraden $E$ die Erzeugenden der Profilflächen herzuleiten, welche in $E$ zum Eingriff kommen.

Weiter seien zwei Verzahnungen kurz erwähnt, bei denen die sphärische Abbildung besonders einfach wird, die verallgemeinerte Oliviersche Verzahnung und eine von der früher besprochenen verschiedene Zykloidenverzahnung. Es sind dies die Fälle, wo $q$ oder $r_1$ dauernd ins Unendliche fällt. Die Normale der Eingriffsfläche im unendlich fernen Punkt von $E$ ist die unendlich ferne Gerade der Zentralebene von $E$.

b) Im ersten Fall, wenn $q$ im Unendlichen liegt, muß die zugehörige Normale $N$ durch die unendlichfernen Punkte von $A_1$ und $A_2$ gehen, die Zentralebene von $E$ muß also immer zu $A_1$ und $A_2$ parallel sein. Dies ist nur möglich, wenn die Eingriffsfläche in eine zu $A_1$ und $A_2$ parallel gerichtete Ebene ausartet. Die Richtung von $E$ ergibt sich als konstant und man stößt auf die bekannte Verzahnung, deren Profilflächen abwickelbare Schraubenflächen[3] sind.

---

[1] In Schell-Salkowski, Allg. Th. der Kurven doppelter Krümmung, S. 183, wird ein Sonderfall dieses Satzes betrachtet, wo $(N)$ die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve ist. S. auch ebendort S. 83.

[2] Ueber diese Kurven, die auch als sphärische Schraubenlinien bezeichnet werden können, siehe Enz. der math. Wiss., III D 4 Fußn. 159.

[3] J. Pützer, a. a. O., nennt sie Spiraloide. Spezialfall Th. Olivier, Théorie géometrique des engrenages. Paris, 1842. Cap. II 24.

c) Ist dagegen $r_1$ dauernd im Unendlichen gelegen, so umhüllt die Zentralebene von $E$ eine zu $A_1$ parallele Zylinderfläche. Die Erzeugenden $E$ der Eingriffsfläche haben dann gegen $A_1$ konstante Neigung[1]), ebenso diejenigen der Profilfläche $\Phi_1$, welche daher eine Zylinderfläche sein muß. In der sphärischen Abbildung artet das eine Profil in einen Punkt aus; das andere wird eine sphärische Epitrochoide. Die Eingriffslinie, ein Kreis um $A_1^0$, geht im allgemeinen nicht durch $M$; ist dies aber der Fall, so wird $\Phi_2^0$ das Kopfprofil eines Kegelrades mit Zykloidenverzahnung. Will man die zugehörige von der in **4** beschriebenen verschiedene räumliche Zykloidenverzahnung mit abwickelbaren Profilflächen finden, so sind auf der Regelfläche $(N)$, die einen Richtungskegel $(N^0)$ von der dritten Ordnung besitzt, also selbst von der sechsten Ordnung ist, die Orthogonaltrajektorien $(q)$ der Erzeugenden zu bestimmen. Diese Aufgabe führt auf elliptische Funktionen[2]).

d) Schließlich greifen wir noch einmal auf die früher beschriebene Zykloidenverzahnung zurück, von der gezeigt wurde, daß sie die Satzeigenschaft besitzt und daß zu dem Rädersatz ein Zahnprofil mit ebener Radialflanke gehört. In der sphärischen Abbildung[3]) ist $E^0$ der Schnitt zweier durch $M^0$ und $Q^0$ gehender, auf einander senkrechter Ebenen. $E^0$ beschreibt also einen sogenannten Orthogonalkegel, während $N^0$, weil es auf $Q^0$ senkrecht steht, ein ebenes Strahlbüschel beschreibt. $A_1^0$ und $A_2^0$ liegen in der Ebene $[M^0 Q^0]$ und zwar wählen wir für $A_2^0$ die besondere Lage senkrecht zu $Q^0$, so daß $A_2^0$ in die Ebene $(N^0)$ fällt. $A_1^0$ soll zunächst mit $Q^0$ zusammenfallen, später aber beliebig gewählt werden. Es wird sich zeigen, daß man von der so bestimmten sphärischen Radialflankenverzahnung ausgehend zu einer ganz neuen räumlichen Radialflankenverzahnung gelangt, welche nicht mit der in **4** beschriebenen zusammenfällt.

Die Geraden $N$ schneiden nämlich $A_1$ alle in demselben Punkt $o_1$, bilden also ein ebenes Strahlbüschel wie $(N^0)$, während in **4** $(N)$ ein Paraboloid war. Der Unterschied erklärt sich daraus, daß in **4** die Radachse $A_2$, wenn sie zu $Q$ senkrecht stehen soll, ins Unendliche rücken muß, während wir jetzt annehmen wollen, daß $A_2$ im Endlichen gelegen ist, was mit der sphärischen Abbildung nicht unvereinbar ist. Die Orthogonaltrajektorien $(q)$ von $(N)$ sind Kreise um $o_1$. Da die Profilflächen, welche verschiedenen Kreisen um $o_1$ entsprechen, Parallelflächen sind, genügt es, den Fall zu untersuchen, wo der Kreis unendlich klein ist. Wieder wie in **4** artet die Zylinderfläche $(\delta)$, welche zu $M$ parallel sein und die Geraden $N$ berühren soll, in eine Gerade $L$ aus. Dieselbe schneidet aber hier die Radachse $A_1$ in $o_1$. Die Eingriffsfläche ist ein Orthogonalkegel durch $A_1$ und $L$. Die Profilfläche $\Phi_2$ wird von einer Ebene umhüllt, welche sich um $A_1$ dreht, während $A_1$ selbst sich um $A_2$ dreht. Die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich dabei wie $\omega_1$ zu $-\omega_2$. Jetzt gehen wir zu einer von $Q$ verschiedenen durch $o_1$ gehenden Radachse über. Soll die Eingriffsfläche dieselbe bleiben, so muß $L$, also die Richtung von $M$, festgehalten werden, während sich das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Zahnräder ändert. Weil die Eingriffsfläche eine Kegelfläche ist, durch deren Spitze die Radachse $A_1$ geht, ist das erste Zahnrad ein Kegelrad. Das zweite hat wie vorher die Profilfläche $\Phi_2$. Die Satzeigenschaft bezieht sich hier also zunächst nur auf das erste Rad, welches aus einem Satz von Kegelrädern, zu dem ein Zahnprofil mit Radialflanke gehört, beliebig ausgewählt werden kann. Aber auch für die zweite Radachse hat man einen gewissen Spielraum. Man kann nämlich die beiden Profilflächen beliebig vergrößern, so daß sie zu sich selbst ähnlich bleiben. Die erste Profilfläche ändert sich als Kegelfläche dabei gar nicht. Dies läuft darauf hinaus, daß man die zweite Radachse in der Richtung des gemeinsamen Lotes der Radachsen parallel zu sich selbst verschieben kann. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ändert sich dabei nicht mehr.

Es ist leicht einzusehen, daß diese wichtige Verzahnungsart, welche zum Unterschied von **4** als Radialflankenverzahnung zweiter Art bezeichnet werden möge, sich noch in einer Richtung verallgemeinern läßt, wenn man nämlich statt $o_1$ einen beliebigen Punkt $q$ von $A_1$ als Kegelspitze wählt. $(N)$ ist dann das Strahlbüschel der durch $q$ und $A_2$ gehenden Geraden. In seiner Ebene kann die Achse des zweiten Rades parallel zu sich selbst verschoben werden, während das erste Rad wieder ein Kegelrad ist, welches aus einem Satz von Kegelrädern beliebig ausgewählt werden kann. Die

[1]) Schell-Salkowski, S. 83.

[2]) Sphärische Abbildung dieser Verzahnung: M. Disteli, Zeitschr. für Math. und Phys. 56, (1908), S. 251.

[3]) Disteli, a. a. O. S. 255.

Achsen dieser Kegelräder liegen in einer durch $q$ gehenden Ebene, welche zu $A_2$ parallel ist. Eine Radialflanke kommt in diesem Satz aber nicht mehr vor. Damit sind die Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen erschöpft, welchen die Satzeigenschaft zukommt, wie man leicht daraus schließt, daß die Radachsen sämtlicher Satzräder die Erzeugenden einer Regelfläche $(N)$ schneiden müssen.

## II. Allgemeine räumliche Verzahnung.

**8. Bestimmung der Eingriffsfläche aus einer gegebenen Profilfläche.** Dreht man eine beliebig gegebene Profilfläche $\Phi_1$ um die zugehörige Radachse $A_1$, so erhält man für jede ihrer Lagen die Berührungskurve mit dem Gegenprofil als Charakteristik bezüglich der Schraubung um $M$ mit dem Parameter $h$. Aus diesen Charakteristiken setzt sich die Eingriffsfläche zusammen. Im allgemeinen Fall wird man rechnerische Behandlung des Problems bevorzugen, indem man die Bedingung aufstellt, daß die Bahntangente eines Punktes der um $A_1$ gedrehten Profilfläche [1]) diese berührt.

Man kann jedoch auch graphisch die Aufgabe lösen, irgend eine Normale der Profilfläche so weit zu drehen, bis sie in die Eingriffslage gelangt, wo sie eine Nulllinie des Nullsystems sein muß. Die unendlichferne Gerade einer zu $A_1$ senkrechten Ebene sei $I$, die zu ihr im Nullsystem konjugierte (zu $M$ parallele) Gerade $K$. Man dreht die Profilnormale um $A_1$, bis sie $K$ in einem Punkt $k$ schneidet. Die Nullebene von $k$ wird dann zu $A_1$ senkrecht stehen. Es gibt zwei solche Punkte $k$, die aber beide zu den gleichen Lösungen führen. Ist einer derselben gefunden, dann macht die weitere Konstruktion keine Schwierigkeit mehr. Durch den Punkt $k$ geht eine Erzeugende $G$ der zweiten Schar auf dem von der Profilnormalen beschriebenen Drehungshyperboloid, deren Konjugierte $H$ in der Nullebene von $k$ liegt. Man bringt $H$ mit dem in dieser Nullebene liegenden, durch $k$ gehenden Parallelkreis des Drehungshyperboloids zum Schnitt. Durch jeden der beiden Schnittpunkte geht dann eine Eingriffslage $N$ der gegebenen Profilnormale. Denn $N$ schneidet zwei konjugierte Gerade $G$ und $H$ und ist daher Nullinie. In der Abb. 3 ist die Konstruktion in einer zu $A_1$ senkrechten Projektionsebene ausgeführt. Die ursprüngliche Lage der Profilnormalen ist nicht eingezeichnet. Die Konstruktion wird sehr einfach, weil sich $G'$ und $H'$ auf $A'_2$ treffen, da die durch den unendlichfernen Punkt von $A_1$ gehende, $G$ und $H$ schneidende Nullinie auch durch $A_2$ gehen muß, und weil $H$ zur Ebene $[G\,K]$ parallel ist, da der Nullpunkt dieser Ebene der Schnittpunkt von $H$ und $I$ sein muß. Ihre Spur in der Projektionsebene ist in der Abbildung eingezeichnet.

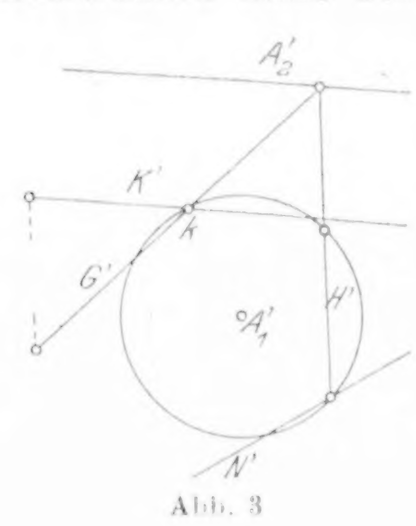


Abb. 3

Für spezielle Profilflächen lassen sich oft einfachere Konstruktionen finden: so müssen bei senkrecht gekreuzten Radachsen die Normalen einer Schraubenfläche mit $A_1$ als Achse, welche durch die Charakteristik derselben gehen, zwei konjugierte Gerade treffen. Auf dieser Grundlage beruht eine Konstruktion der Eingriffsfläche des Schneckengetriebes. [2])

Wenn eine Profilfläche die Form einer Drehungsfläche mit ganz beliebiger Achse hat, läßt sich die Charakteristik, wie folgt, finden. Eine kleine Schraubung der Achse der Drehungsfläche um $M$ läßt sich ersetzen durch eine kleine Drehung um die zur Achse konjugierte Gerade. Dasselbe gilt dann auch von der Drehungsfläche selbst, wenn man von einer kleinen Drehung derselben in sich, der zu jener konjugierten Drehung, absieht. Die Charakteristik bezüglich der Schraubung ist also genau dieselbe, wie diejenige bezüglich einer kleinen Drehung um die zur Achse der Drehungsfläche konjugierte Gerade. Ein besonderer Fall sei noch hervorgehoben. Wenn die Achse der Drehungsfläche momentan zu $M$ parallel wird, geht die Charakteristik, welche dann zugleich einer Parallelverschiebung entspricht, in die Eigenschattengrenze für parallel einfallende Strahlen

[1]) In dem oben gewählten Koordinatensystem sei ihre Gleichung

$$f(x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1,\ y\cos\psi_1 - x\sin\psi_1, z) = 0.$$

Die Richtungkosinus der Bahntangente verhalten sich wie $-ny + z : nx - a\operatorname{ctg}\alpha : -(x-a)$, wenn $n = \operatorname{ctg}(A_1 M)$. Damit ist die Gleichung der Charakteristik sofort anzuschreiben. Vgl. auch H. Resal, C. R. 117, S. 391.

[2]) S. meine Abh. Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 60, (1912), S. 250.

über. Zu ihrer Konstruktion wird in den Lehrbüchern der Darstellenden Geometrie das sogenannte Kugelverfahren empfohlen. Es ist dies genau die Konstruktion, in welche die am Schluß von **5** angegebene Charakteristikbestimmung für Drehungsflächen in diesem Sonderfalle übergeht.

Ort der Berührungspunkte der Profilflächen mit der Eingriffsfläche. Die Bestimmung der Eingriffslage wird am einfachsten bei den Profilnormalen, welche die Radachse $A_1$ treffen. Man hat sie nur zu drehen, bis sie auch die zweite Radachse $A_2$ schneiden, weil sie in dieser Lage Nullinien sind. Die Kurve $(q_1)$, deren Normalen durch $A_1$ gehen, ist die Charakteristik der Profilfläche $\Phi_1$ bezüglich einer Drehung um $A_1$. Die entsprechende Eingriffslinie $(q)$ ist auf der von $(q_1)$ beschriebenen Drehungsfläche $\Delta_{q_1}$ wieder wie in **5** zu bestimmen, indem man den Parallelkreis, welchen $q_1$ beschreibt, mit einer Ebene zum Schnitt bringt, die durch $A_2$ und den Schnittpunkt der Profilnormale in $q_1$ mit $A_1$ geht. Die beiden Schnittpunkte bestimmen dann die Eingriffstellen der Profilnormale. Jeder Punkt von $\Phi_1$, dessen Normale durch $A_1$ geht, kann daher offenbar nur mit einem Punkt von $\Phi_2$ zum Eingriff gelangen, dessen Normale $A_2$ trifft.

Satz IV: Die Charakteristiken der Profilflächen bezüglich ihrer Drehachsen kommen miteinander zum Eingriff und zwar in einer Kurve, welche die zugehörigen Achsensekanten senkrecht durchschneidet.

Zur praktischen Kraftübertragung eignen sich die betreffenden Stellen der Profilflächen offenbar nicht, weil der Normaldruck dort durch die Radachsen geht, aber theoretisch sind sie wichtig. Denn wenn die Charakteristik $(q_1)$ reell ist, so kann man unmittelbar $(q)$ und dann die entsprechende Kurve $(q_2)$ des Gegenprofils bestimmen. In einem Eingriffspunkt $q$ werden die Profilflächen von der Eingriffsfläche berührt, weil die Tangente der Kurve $(q)$ in die Berührungsebene der Profilflächen fällt, und außerdem die Eingriffsfläche ja die Berührungskurve der Profilflächen mit diesen gemein hat.

Da auch die Bahntangente von $q$ in die gemeinschaftliche Berührungsebene der Profilflächen und der Eingriffsfläche fällt, läßt sich $(q)$ auch auf der Eingriffsfläche definieren als Ort der Punkte, deren Bahntangenten die Eingriffsfläche berühren. Zu der so definierten Kurve der Eingriffsfläche gehört allerdings außer der Kurve $(q)$ auch der Ort der Punkte, wo die Bahntangente mit der Tangente der Profilberührungslinie zusammenfällt. Die beiden Kurven bilden zusammen die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich der zum Nullsystem gehörigen Schraubung.

Nach den ausgeführten Konstruktionsmethoden muß jeder Punkt der Profilfläche $\Phi_1$ an zwei Stellen zum Eingriff gelangen. Daraus folgt z. B. für die im Abschnitt I behandelten abwickelbaren Profilflächen, daß jede noch ein zweites nicht abwickelbares Gegenprofil haben muß. Im allgemeinen Falle können die zwei zu einem Profilpunkt gehörigen Eingriffspunkte auch imaginär werden. Die Punkte der Profilfläche, welche die zweimal von den gar nicht zum Eingriff gelangenden Punkten trennen, bilden eine mathematische Eingriffsgrenze. Denkt man sich alle Berührungskurven der Profilflächen auf eine Anfangslage der Profilfläche durch Zurückdrehen um $A_1$ zurückgeführt, so bilden sie die Kurven gleichzeitigen Eingriffs auf der Profilfläche. Durch jeden Punkt der Profilfläche gehen zwei solche Kurven gleichzeitigen Eingriffs, die für die Punkte ihrer Hüllkurve, eben jener Grenzkurve, zusammenfallen[1]. Für den Fall einer ebenen Profilfläche schließt man daraus, daß diese Hüllkurve eine Kurve zweiter Klasse ist, deren Tangenten die Linien gleichzeitigen Eingriffs bilden.

Wenn ein Punkt der Hüllkurve in $r_1$ zum Eingriff kommt, so geht die Normale der Eingriffsfläche in $r_1$ durch $A_1$. Denn der Punkt beschreibt um $A_1$ einen Kreis, welcher bei $r_1$ zwei konsekutive Berührungslinien trifft. Dreht man also die Eingriffsfläche um $A_1$, so zerfällt die einhüllende Drehungsfläche in $\Delta_{q_1}$ und $\Delta_{r_1}$.

**9. Gleitkurvenpaare.** Wenn eine Verzahnung aus der Eingriffsfläche hergeleitet werden soll, sind diejenigen Kurvenpaare von Bedeutung, welche bei der Bewegung sich stets berührend aneinander hingleiten. Sie sollen kurz Gleitkurvenpaare genannt werden. Solche Kurven treten auf jeder bewegten Fläche und deren Hüllfläche in einfach unendlicher Zahl auf. Nun können bei jeder räumlichen Bewegung auch ganz unabhängig

[1]) Man erhält neben $f(x, y, z) = 0$ für die Kurven gleichzeitigen Eingriffs, welche je einem konstanten Wert von $\psi_1$ entsprechen, eine Gleichung $A \cos \psi_1 + B \sin \psi_1 = C$, wo $A\ B\ C$ Funktionen der Koordinaten $x\ y\ z$ eines Profilpunktes sind. Die Hüllkurve ist durch $A^2 + B^2 = C^2$ bestimmt.

von einer Fläche im bewegten System Gleitkurven definiert werden als solche Kurven, deren Tangenten Bahntangenten ihrer Punkte sind. Ihre Hüllkurven sind dann die Gegengleitkurven.

Bei der Zahnradbewegung gilt:

**Satz V:** Durch Drehung eines Paares von Gleitkurven um die zugehörigen Radachsen entstehen Drehungsflächen, welche sich längs der Eingriffslinie der Gleitkurven berühren.

Wenn die beiden Gleitkurven $G_1$ und $G_2$ sich momentan in einem Punkt $p$ berühren, dann schneidet die Nullebene von $p$, welche auf der gemeinschaftlichen Tangente von $G_1$ und $G_2$ senkrecht steht, die Radachsen in Punkten, deren Verbindungslinie als Nullinie durch $p$ geht. Diese Verbindungslinie ist gemeinsame Normale der Drehungsflächen in $p$. Auf derselben steht die Tangente der Berührungskurve $G$ der Drehungsflächen senkrecht, deshalb hat man weiter den Satz:

Die Eingriffslinie eines Gleitkurvenpaares schneidet die Erzeugenden einer durch die Radachsen gehenden Regelfläche senkrecht[1]).

Umgekehrt gibt es zu jeder Orthogonaltrajektorie $G$ einer durch $A_1$ und $A_2$ gehenden Regelfläche ein Gleitkurvenpaar, welches man etwa durch eine graphische Integration finden kann, die der in **5** beschriebenen analog in einer zu $A_1$ bzw. $A_2$ senkrechten Projektionsebene ausgeführt werden kann.

Sind $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ zwei aneinander in der Zeit $dt$ hingleitende Bogenelemente der Gleitkurven, so ist das entsprechende Element der Eingriffslinie $G$:

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{v}_1\, dt = d\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{v}_2\, dt\,^{2)}.$$

Bezeichnet man das Gleitverhältnis $d\mathfrak{s}_1 : d\mathfrak{s}_2$ mit $\lambda$, so ist $d\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{v}_1 - \lambda\,\mathfrak{v}_2}{1-\lambda}\, dt$.

Die Momentanbewegung des Eingriffspunktes $p$ auf $G$ läßt sich aus zwei kleinen Drehungen um $A_1$ und $A_2$ zusammensetzen. Die Winkelgeschwindigkeiten sind dabei $\frac{\omega_1}{1-\lambda}$ und $\frac{-\lambda\,\omega_2}{1-\lambda}$.

Bestimmung einer Verzahnung aus der Eingriffsfläche. Mittels der Gleitkurven läßt sich die Aufgabe lösen, Profilflächenpaare zu bestimmen, welche auf einer gegebenen Fläche zum Eingriff gelangen können. Dabei sind die Radachsen und Winkelgeschwindigkeiten als gegeben zu betrachten. Die Gleitkurven eignen sich zu diesem Zweck, weil ihr Eingriff von der nächsten Umgebung der Profilflächen unabhändig ist, eine Eigenschaft, die anderen Kurven der Profilflächen nicht zukommt.

Kennt man unendlich viele eine Fläche $(G)$ erfüllende Kurven $G$, welche die durch ihre Punkte gehenden Achsensekanten senkrecht durchschneiden, so sind alle Profilflächenpaare $\Phi_1$ und $\Phi_2$, welche $(G)$ zur Eingriffsfläche haben, wie folgt zu bestimmen.

[1]) Die Kurve muß der Differentialgleichung genügen:

$$(x-a)(x\,dx + y\,dy) + (xz - ay \operatorname{ctg} \alpha)\, dz = 0.$$

[2]) Aus diesen Gleichungen kann man die Gleitkurven rechnerisch bestimmen. Denn da der Vektor $d\mathfrak{s}_1 = d\mathfrak{s} - \mathfrak{v}_1 dt$ zur Bahntangente parallel sein soll, müssen die Komponenten $dx - y\,d\psi_1$, $dy + x\,d\psi_1$, $dz$ zu den Richtungscosinus der Bahntangente, also zu $-ny + z$, $nx - a \operatorname{ctg} a$, $-(x-a)$ proportional sein, woraus sich neben der Gleichung der Fußn. 1 das folgende Integral für den Drehungswinkel $\psi_1$ ergibt

$$\psi_1 = \int \frac{n(x\,dx + y\,dy) - a \operatorname{ctg} \alpha\, dx - z\,dy}{xz - a \operatorname{ctg} \alpha\, y}.$$

Um den Arbeitsverlust durch gleitende Reibung zu vermindern, sucht man $d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{s}_2 = (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\, dt$ möglichst klein zu machen. Die Länge dieses Vektors ist nun für einen Punkt, der die Entfernung $l$ von $M$ hat $\sqrt{h^2 + l^2}\, dt$, so daß das Ziel umso besser erreicht wird, je näher man den Eingriff an $M$ heranrückt. Aber man sieht, daß der erreichte Vorteil bei der hyperboloidischen Verzahnung ein weit geringerer ist, als bei der konischen und zylindrischen, wo $h$ Null ist, weil $\sqrt{h^2 + l^2}$ sich nur wenig ändert, wenn $l$ gegen Null hin abnimmt, wenn nur $l$ gegen $h$ klein gewählt wird.

Während die Bewegung zweier Zahnräder, deren Eingriff momentan oder dauernd in $M$ stattfindet, eine rein rollende ist, wenn die Radachsen in einer Ebene liegen (Whitesche Schraubenräder), kann bei windschiefen Radachsen, wo $h$ von Null verschieden ist, für keinen Punkt des Raumes $d\mathfrak{s}_1 = d\mathfrak{s}_2$ werden, und Olivier (Th. des engr. S. 100) konnte nur zu einer »rein rollenden« hyperboloidischen Verzahnung gelangen auf Grund einer sonderbaren, von der jetzt üblichen ganz verschiedenen Definition des Rollens. Die von ihm angegebenen Zahnräder sind auch gar nicht geeignet, die Reibungsarbeit zu vermindern.

Aus den Kurven $G$ leitet man die Gleitkurven $G_1$ durch Integration ab. Die Profilfläche $\Phi_1$ entsteht durch Zusammensetzung aus diesen Gleitkurven $G_1$, die aber wegen der freien Wahl der Integrationskonstanten noch insofern willkürlich ist, als jede Kurve $G_1$ noch beliebig um $A_1$ gedreht werden darf, wenn nur durch die Zusammensetzung der Kurven eine kontinuierliche Fläche entsteht. Man kann etwa eine beliebige Raumkurve wählen, durch welche $\Phi_1$ gehen soll. Dann ist aber die Verzahnung bestimmt, da die Gegenprofilfläche durch die Proportionalität der Drehungswinkel zu finden ist. Am bequemsten und ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit wählt man die Kurve auf der Eingriffsfläche selbst. Sie ist dann eine Kurve gleichzeitigen Eingriffs.

Um alle zu einer beliebigen Eingriffsfläche gehörigen Verzahnungen zu finden, muß man also zuerst diejenigen Kurven $G$ der Fläche bestimmen, welche ihre Achsensekanten senkrecht schneiden[1]).

Auf der Eingriffsfläche geht durch jeden Punkt ein Bogenelement einer Kurve $G$, welches senkrecht zur zugehörigen Achsensekante gerichtet ist. Singuläre Punkte sind nur die Schnittpunkte der Eingriffsfläche mit den Radachsen, sowie diejenigen Punkte der Eingriffsfläche, in denen die Normale durch beide Radachsen geht. Solche Punkte, die früher mit $q$ bezeichnet wurden, treten auf beliebig gewählten Eingriffsflächen im allgemeinen in endlicher Zahl auf. Geht man dagegen von einer beliebigen Profilfläche aus und bestimmt aus ihr die Eingriffsfläche, so befinden sich auf dieser im allgemeinen unendlich viele Punkte der genannten Eigenschaft, die eine singuläre Kurve $(q)$ bilden, wie aus **8** hervorgeht. Um festzustellen, wie sich die Kurven $G$ in einem singulären Punkt verhalten, kann man die Kurven in der Berührungsebene zum Vergleich heranziehen, welche die zugehörigen Achsensekanten senkrecht schneiden; dieselben müssen in der nächsten Umgebung des singulären Punkts mit den Kurven $G$ zusammenfallen.

Es ist somit das Beispiel zu behandeln, wo die Eingriffsfläche eine beliebige Ebene ist. Die in einer Ebene liegenden Kurven $G$, durch deren Drehung um zwei Geraden $A_1$ und $A_2$ zwei sich berührende Drehungsflächen entstehen, hat Herr G. Scheffers[2]) untersucht und gefunden, daß diese Kurven Orthogonaltrajektorien einer Schar von in der Ebene liegenden Klein-Lieschen $W$-Kurven sind. Diese $W$-Kurven schneiden $A_1$ und $A_2$ und berühren in den Schnittpunkten die Projektionen von $A_1$ und $A_2$ auf die Ebene. Diese Projektionen selbst gehören zu den $W$-Kurven. Sie schneiden sich in dem singulären Punkt $q$. Andere $W$-Kurven gehen nicht durch diesen Punkt. Es gehen daher auch nur zwei Kurven $G$ durch den singulären Punkt $q$, und im Fall der Existenz einer singulären Kurve $(q)$ geht durch jeden Punkt derselben noch eine Kurve $G$.

Wenn man die Profilflächen, sowie die Eingriffsfläche einer Verzahnung kennt und auf der letzteren die Eingriffslinien der Gleitkurven sich bestimmen lassen, so kann man leicht alle zu der Eingriffsfläche gehörigen Verzahnungen angeben: Denn dreht man eine Kurve $G$ um $A_1$, so schneidet die entstehende Drehungsfläche aus der Profilfläche $\Phi_1$ die entsprechende Gleitkurve $G_1$ aus, so daß man aus den Kurven $G$ alle Gleitkurven $G_1$ und $G_2$ und aus diesen alle gesuchten Verzahnungen ableiten kann.

Für einen der unter **7** angedeuteten Fälle (b) waren die Profilflächen abwickelbare Schraubenflächen, die Eingriffsfläche eine zu den Radachsen parallele Ebene. Wenn insbesondere die Radachsen sich senkrecht kreuzen, so ergibt sich für die Kurven $G$ eine Schar von Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten, welche gegen die Radachsen gleiche Neigung haben[3]). Dreht man diese Hyperbeln um $A_1$, so entstehen Drehungs-

[1]) Dies geschieht durch Integration der Gleichung der Fußn. 1 S. 442 mit der Gleichung $z = f(x, y)$ der Eingriffsfläche. Ist das Integral in der Form $\varphi(x, y\, z) = \mu$ gefunden, so liefert das Integral der Fußn. 2 vollends die allgemeine Lösung der Aufgabe, wenn man die Integrationskonstante gleich einer beliebigen Funktion von $\mu$ setzt. Damit ist das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung für $\psi_1$ gekennzeichnet, welche man durch eine nicht ganz einfache Rechnung aus der Grundbedingung erhalten kann, daß die Bahntangenten der Punkte der Berührungskurve der Profilflächen die letzteren berühren müssen. Sie lautet, wenn die partiellen Differentialquotienten von $z$ nach $x$ und $y$ mit $p$ und $q$ bezeichnet werden:

$$\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)(xz - a\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, y) + \left(y\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - x\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)(x - a) + p(-ny + z) + q(nx - a\,\mathrm{ctg}\,\alpha) + x - a = 0.$$

Die Gleitkurven sind die Charakteristiken der Differentialgleichung.

[2]) Mathematische Zeitschrift 11 (1921), S. 315.

[3]) Enzykl. der Math. Wiss., III D 4, Nr. 17.

hyperboloide mit gemeinschaftlichem Asymptotenkegel, welche aus der abwickelbaren Schraubenfläche $\Phi_1$, die Gleitkurven $G_1$ ausschneiden; aus diesen lassen sich beliebig viele neue Profilflächen zusammensetzen, wenn man sie um $A_1$ dreht, bis sie eine beliebige Raumkurve schneiden.

Diese Schnittkurven von einer abwickelbaren Schraubenfläche mit einem Drehungshyperboloid um die Schraubenachse sind zugleich geeignete Beispiele für Gleitkurven. Die einfachsten unter denselben sind diejenigen, welche eine Gerade (vgl. **4**) zur Eingriffslinie haben. Der Kehlkreis des Hyperboloids liegt dann auf dem Zylinder, welcher durch die Rückkehrkurve der Schraubenfläche geht. Die betreffende Kurve gehört zu den von Olivier untersuchten »Developpantes hyperboloidiques«[1]).

**10. Verzahnung mit kongruenten Eingriffslinien.** Wenn sich ein räumliches System $\Sigma$ so bewegt, daß jede Momentanbewegung sich aus Drehungen um $A_1$ und $A_2$ zusammensetzen läßt, die sich wie $\omega_1 : -\omega_2 \lambda$ verhalten mögen, so beschreibt jeder Punkt $p$ des Systems eine Orthogonaltrajektorie seiner Achsensekanten. Denn die beiden Geschwindigkeitskomponenten, welche dem Punkt durch eine Elementardrehung um jede der beiden Radachsen verliehen werden, stehen senkrecht auf der durch $p$ gehenden Achsensekante, also auch die resultierende Geschwindigkeit. Man kann daher jede Bahnkurve einer solchen Bewegung als Eingriffslinie eines Gleitkurvenpaares ansehen, und wenn man die Bahnfläche einer beliebigen Kurve des Systems $\Sigma$ als Eingriffsfläche wählt, entstehen Verzahnungen, die besondere Beachtung verdienen.

Die beschriebene Hilfsbewegung des Systems $\Sigma$ liegt den Untersuchungen von M. Disteli über geradlinigen Eingriff[2]) zu grunde. Die Momentanachsen der Hilfsbewegung bilden bekanntlich ein Zylindroid (Plückersches Konoid)[3]), das Rastaxoid der Bewegung. Das Gangaxoid ergibt sich bei der Betrachtung der umgekehrten Bewegung.

Die umgekehrte Bewegung läßt sich besonders einfach beschreiben mittels der Bahnkurven der Punkte $o_1$ und $o_2$, in denen die Radachsen durch ihr gemeinsames Lot getroffen werden. Dieselben sind nämlich ein Paar Bertrandscher Kurven. Die Bahnfläche $(A_1)$ entsteht dadurch, daß $A_1$ in jedem Moment um die Achse $A_2$, die aber selbst auch bewegt wird, eine kleine Drehung ausführt. Würde man $A_2$ festhalten, im übrigen $A_1$ in jedem Moment ganz ebenso um $A_2$ drehen, wie es vorher geschah, so würde $A_1$ ein Drehungshyperboloid um $A_2$ beschreiben, dessen Erzeugende denen der Regelfläche $(A_1)$ zugeordnet sind und zwar derart, daß die beiden Flächen auf einander abrollen können. Man braucht nur die direkte Bewegung zu betrachten, bei der die Fläche $(A_1)$ sich durch die Radachse $A_1$ durchbewegt. Sie wird das Drehungshyperboloid stets dabei berühren und man kann dieses mit einer solchen Geschwindigkeit um $A_2$ drehen, daß ein Punkt desselben, welcher auf der Berührungslinie mit $(A_1)$ liegt, genau dieselbe Geschwindigkeit hat, wie der entsprechende Punkt von $(A_1)$. Daraus geht hervor, daß $(A_1)$ auf das Drehungshyperboloid abwickelbar ist. Entsprechendes gilt von der Bahnfläche, welche $A_2$ bei der umgekehrten Bewegung beschreibt und nach einem Satze von Laguerre und Bioche[4]) müssen $o_1$ und $o_2$ Bertrandsche Kurven beschreiben.

Das Gangaxoid der Hilfsbewegung läßt sich aus der Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven leicht ableiten. Die Momentanachse der umgekehrten Bewegung ist die Achse zweier Schraubenlinien, welche die Bertrandschen Kurven in entsprechenden Punkten oskulieren. Durch zwei konsekutive Hauptnormalen ist dieselbe aber als ihr gemeinsames Lot bestimmt. Also gilt: Das Gangaxoid besteht aus den Striktionsstrahlen der Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven. Und weiter:[5]) Das Gangaxoid und die Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven berühren sich längs ihrer gemeinsamen Striktionslinie und die Erzeugenden der beiden Regelflächen durchschneiden sich dort senkrecht. Die eine Fläche besteht aus den Striktionsstrahlen der anderen.

Die Fläche $(M)$, welche die Zentralachse bei der umgekehrten Bewegung beschreibt, läßt sich leicht aus den Bertrandschen Kurven ableiten, da $M$ gegen $A_1$ und $A_2$ eine feste Lage hat.

---

[1]) Th. des engr., S. 48. Die Gleitkurve kann im besonderen auch Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden des Hyperboloids werden. Durch Rechnung ergibt sich, daß dann das Abstandsverhältnis der Eingriffsebene von den Radachsen die dritte Potenz von dem Verhältnis der kürzesten Abstände der Zentralachse von den Radachsen sein muß. Vgl. Satz III.

[2]) Zeitschr. für Math. und Phys. 59, (1911), S. 252.

[3]) Enzykl. der Math. Wiss., IV 2. 16.

[4]) Enzykl. der Math. Wiss., III D 4, Fußn. 119 und Nr. 30.

[5]) Schell-Salkowski, Kap. VIII 1, S. 75.

Die direkte Hilfsbewegung läßt sich jetzt auch ohne die Axoide folgendermaßen darstellen. Zwei starr verbundene Bertrandsche Kurven, deren konstanter senkrechter Abstand gleich dem kürzesten Abstand der Radachsen ist, und deren Tangenten in entsprechenden Punkten denselben Winkel bilden, wie die Achsen $A_1$ und $A_2$, werden so durch $o_1$ und $o_2$ gezogen, daß ihre Tangenten in diesen Punkten stets senkrecht zu $A_2$ und $A_1$ gerichtet sind. Es gehört dann zu der Bahn jedes Punktes des bewegten Systems $\Sigma$ ein Paar von Gleitkurven $G_1$ und $G_2$. Das Verhältnis $\lambda$ der aneinander hingleitenden Bogenelemente ist zur gleichen Zeit in allen Punkten des Raumes dasselbe. Es läßt sich aus dem Bogenelementen der Bertrandschen Kurven, welche in derselben Zeit durch $o_1$ bezw. $o_2$ durchgleiten, einfach ableiten, da jene sich wie $\omega_2 \lambda : \omega_1$ verhalten müssen.

Die Geschwindigkeit der Bewegung des Systems $\Sigma$ läßt sich insbesondere so regulieren, daß irgend einer seiner Punkte die Geschwindigkeit $\frac{\mathfrak{v}_1 - \lambda \mathfrak{v}_2}{1 - \lambda}$ besitzt, wenn er wieder, als Punkt des ersten bzw. zweiten Radkörpers aufgefaßt, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ bzw. $\mathfrak{v}_2$ haben würde. Für irgend einen Punkt, der momentan auf der Zentralachse gelegen ist, liegen die Endpunkte der drei Geschwindigkeiten auf einer Parallelen zu $M$. Die Gerade, welche momentan mit $M$ zusammenfällt, gelangt also bei einer Momentanbewegung mit $\Sigma$ an dieselbe Stelle, wie bei der entsprechenden kleinen Drehung um eine der Radachsen. Nur erscheinen die Punkte der Geraden in den neuen Lagen in der Geraden selbst gegen einander verschoben. Die Fläche $(M)$ schrotet daher bei der Hilfsbewegung auf den um die Radachsen sich drehenden Grundhyperboloiden ab. Wenn ein Punkt von $\Sigma$ die Kurve $G$ beschreibt, sind seine Bahnen relativ zu den Radkörpern offenbar die Gleitkurven $G_1$ und $G_2$. Schließlich wird eine beliebige Kurve von $\Sigma$ die Eingriffsfläche zweier Profilflächen beschreiben, welche die Bahnflächen derselben Kurve bezüglich der Radkörper sind. Die entstehende Verzahnung hat die Eigenschaft, daß die Berührungslinie der Profilflächen immer zu sich selbst kongruent bleibt.

**11. Windschiefe Regelflächen als Profilflächen.** Um zu zeigen, daß die Eingriffsfläche zweier windschiefer Regelflächen stets als Bahnfläche einer Geraden darstellbar ist, welche einem in der angegebenen Weise bewegten System $\Sigma$ angehört, untersuchen wir das Gleitverhältnis der Gleitkurven längs einer Berührungslinie $E$ der Profilflächen. Die Bahntangenten längs $E$ bilden ein Paraboloid, dessen eine Richtungsebene zur konjugierten Geraden von $E$ senkrecht steht. Dieses Paraboloid wird von beiden Profilflächen längs $E$ berührt. Es müssen daher zwei einander entsprechende, zu $E$ benachbarte Erzeugende der Profilflächen $E_1$ und $E_2$ mit $E$ zur zweiten Schar der Erzeugenden des Paraboloids gehören. Die Stücke, welche $E$ und $E_1$ bezw. $E$ und $E_2$ auf einer Bahntangente begrenzen, sind die aneinander hingleitenden Elemente der Gleitkurven. Das Verhältnis dieser Elemente ergibt sich also längs $E$ konstant. Daraus folgt aber nach **9**, daß $E$ durch die Kombination zweier kleiner Drehungen um $A_1$ und $A_2$ in die Eingriffslage $E'$ von $E_1$ und $E_2$ übergeführt werden kann.

Man könnte vermuten, daß auch besondere abwickelbare Profilflächen existieren, deren Eingriffsfläche durch eine Distelische Hilfsbewegung erzeugt werden kann. Die Erzeugenden $E_1$ und $E_2$ müssen dann $E$ an derselben Stelle treffen: Sie ist nach dem Früheren mit $r$ zu bezeichnen. Die Rückkehrkurven der beiden Profilflächen berühren sich in $r$. Nach **6** ist dies nur auf der Geraden $D$ möglich, der Projektion von $M$ auf die durch $E$ parallel zu $M$ gehende Ebene $\delta$. Es ist also $r$ der $M$ nächstgelegene Punkt von $E$. Die Normale der Eingriffsfläche in $r$ muß beide Radachsen treffen, die Kurve $(r)$ also eine Orthogonaltrajektorie ihrer Achsensekanten sein. Die Rückkehrkurven der Profilflächen bilden dann ein Gleitkurvenpaar, dessen Schmiegungsebenen beim Eingriff zusammenfallen, nämlich in der Ebene $\varepsilon$, welche die Eingriffsgerade $E$ zur Charakteristik hat. Untersucht man durch Rechnung, ob sich die Eingriffsfläche einer so gekennzeichneten Verzahnung durch eine Distelische Hilfsbewegung darstellen läßt, so findet man, daß nur die abwickelbaren Schraubenflächen die verlangte Eigenschaft besitzen, welche durch Verschraubung einer beliebigen Bahntangente um $M$ entstehen. Die Profilflächen würden mit der Eingriffsfläche zusammenfallen, so daß keine eigentliche Verzahnung der verlangten Art existiert.

Die Verzahnungen mit geradlinigem Eingriff lassen sich also in zwei Gruppen trennen, von denen die erste als Profilflächen windschiefe Regelflächen besitzt, während die Profilflächen der zweiten sich in die Ebene abwickeln lassen. Außer dem Verhalten der Striktionslinien, die nur bei der ersten Gruppe miteinander zum Eingriff kommen,

sind noch andere Unterschiede hervorzuheben, welche für die beiden Gruppen charakteristisch sind. Bei der zweiten Gruppe ließ sich auf jeder Eingriffsgeraden ein Punkt finden, in welchem die Eingriffsfläche von den Profilflächen berührt wird. Bei der ersten Gruppe gibt es dagegen immer zwei solche Punkte auf jeder Eingriffsgeraden, weil zwei Regelflächen, welche eine Erzeugende gemein haben, im allgemeinen sich in zwei Punkten derselben berühren. Bei der ersten Gruppe schneiden zwei Gleitkurven einer Profilfläche aus den Erzeugenden gleiche Stücke aus [1]), was bei der zweiten nicht der Fall ist.

Um von einer gegebenen konischen Verzahnung zu einer hyperboloidischen Verzahnung mit windschiefen Profilflächen zu gelangen, untersuchen wir zunächst die Distelische Hilfsbewegung in der sphärischen Abbildung, insbesondere die inverse Bewegung. Den beiden auf Drehungshyperboloide abwickelbaren Bahnflächen $(A_1)$ und $(A_2)$ entsprechen zwei sphärische Parallelkurven. Denn dem Zylindroid entspricht eine Ebene, welche bei der inversen Bewegung auf einer Kegelfläche abrollt. In dieser Ebene liegen die Geraden $A_1^0\, A_2^0\, M^0$, sowie die Parallelen zu den Bahntangenten $T_1$ und $T_2$ von $o_1$ und $o_2$. Die Schnittpunkte sämtlicher 5 Geraden mit der Bildkugel beschreiben daher sphärische Parallelen. Seien die Bahnen, welche $A_1^0$ und $T_1^0$ auf der Bildkugel ausschneiden, durch die in Funktion eines beliebigen Parameters gegebenen Koordinaten eines Bahnpunktes bestimmt. Um die zugehörige Bertrandsche Kurve zu bestimmen, braucht man nur die Richtungskosinus ihrer Tangente $t_x\, t_y\, t_z$, welche zugleich diejenigen von $T_1^0$ sind, mit $\frac{a}{\sin\alpha}\, d\sigma$ zu multiplizieren und zu integrieren. Dabei bedeutet $d\sigma$ das Bogenelement der sphärischen Indikatrix von $A_1$, welches sich zum Bogenelement der Bertrandschen Kurve $ds$ wie $\sin\alpha$ zu $a$ verhält ($a = o_1\, o_2$; $\alpha = \measuredangle\, A_1\, A_2$). Wenn man nämlich $A_1$ eine kleine Drehung um $A_2$ ausführen läßt, beschreibt $o_1$ das Bogenelement $ds = a\, d\tau$ und $A_1$ bildet mit der Ausgangslage den Winkel $d\sigma = \sin\alpha\, d\tau$, wo $d\tau$ den kleinen Drehungswinkel bedeutet.

Sind die beiden Bertrandschen Kurven gefunden, dann läßt sich vollends die Eingriffsfläche, sowie die Profilflächen der hyperboloidischen Verzahnung ohne weitere Integration ableiten.

Weil allen Geraden des Systems $\Sigma$, welche dieselbe Richtung haben, in der sphärischen Abbildung nur ein einziger Strahl entspricht, gehören hier zu jeder konischen Verzahnung $\infty^2$ hyperboloidische Verzahnungen.

Wenn man die Ebene $[A_1^0\, A_2^0]$ auf einem Kreiskegel abrollen läßt, so daß die sphärischen Parallelen sphärische Schraubenlinien sind, so ist auch die sphärische Abbildung der gemeinsamen Hauptnormalen der zugehörigen Bertrandschen Kurven ein Kreis und man gelangt zu den von Herrn E. Salkowski [2]) behandelten Bertrandschen Kurven.

**12. Praktische Gesichtspunkte.** Wenn man die in der vorliegenden Abhandlung genannten räumlichen Verzahnungen auf ihre praktische Verwendbarkeit und Herstellbarkeit prüfen will, springen die Vorzüge der Radialflankenverzahnung erster Art ins Auge. Sind die Radachsen sowie das Uebersetzungsverhältnis gegeben, so können die Hyperboloidräder ganz analog den Stirnrädern mit Zykloidenverzahnung konstruiert werden. Wie bei diesen hat man unendlich viel Möglichkeiten, die Eingriffsfläche auszuwählen und kann, wenn man will, eine solche für Kopf- und Fußprofil unterscheiden. Die Verzahnung ist von dem Mangel frei, welcher die Räder mit abwickelbaren Schraubenflächen als Profilflächen zur praktischen Verwendung unbrauchbar macht, daß sie sich nämlich nur für Drehung in einer Richtung einrichten lassen [3]). Eine der Zahnflanken ist aber konkav. Zur Herstellung der Räder eignet sich das zum Rädersatz gehörige Rad mit ebener Zahnflanke. Wenn man dessen Zahn als Fräser ausbildet, kann man mit demselben alle andern Räder des Satzes nach einem bekannten Verfahren herstellen, welches z. B. bei F. Grashof, Theor. Maschinenlehre II, S. 80, beschrieben ist und jetzt meist als Abwälzverfahren bezeichnet wird [4]).

Aehnliches gilt von der Radialflankenverzahnung zweiter Art, wenn man wieder alle Kegelräder des zugehörigen Satzes in die so bezeichnete Verzahnung einbezieht. Ein kleiner Nachteil gegenüber der Radialflankenverzahnung erster Art ist, daß sich der Eingriff von der Zentralachse $M$ weiter entfernt. 177

[1]) Disteli, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 59, 1911, S. 263.

[2]) Math. Ann. 69, 1910, S. 560.

[3]) W. Dyck, Katalog math. Modelle, München 1892, S. 348.

[4]) Diese Herstellungsmethode wird insbesondere für Kegelräder verwendet (Bilgram-, Gleason-, Warrenmaschine u. a. Vgl. C. Barth, Die Grundlagen der Zahnradbearbeitung.)

# Über die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung.

Von **A. BASCH** in Wien.

In der Meßtechnik tritt sehr oft die Frage auf, ob und inwieweit durch das Hinzutreten einer neuen Beobachtung zu einer Beobachtungsreihe die Güte dieser Beobachtungsreihe und die Genauigkeit ihres Ergebnisses gesteigert wird. Diese Frage soll hier zunächst für den einfach liegenden Fall der direkten Beobachtungen und sodann für den wichtigsten Fall der vermittelnden Beobachtungen besprochen werden. Es wird insbesondere untersucht, wie die neu hinzutretende Beobachtung gelegen sein muß, damit einesteils die gesamte Beobachtungsreihe als solche, andererseits das Beobachtungsergebnis in seiner Genauigkeit verbessert wird.

**1. Direkte Beobachtungen.** Für eine gesuchte Größe $X$ mögen $n$ direkte Beobachtungen (Lesungen) $l_\nu$ mit den Gewichten $p_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ vorliegen. Dann ist bekanntlich der »vorteilhafteste Wert« der gesuchten Größe $X$ bezw. der »vorteilhafteste Fehler« der Lesung $l_\nu$

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} \text{ [1]} \quad \ldots \quad (1), \qquad v_\nu = l_\nu - x \quad \ldots \quad (2),$$

der mittlere Fehler gerechnet auf das Gewicht 1, bezw. der mittlere Fehler des Mittels $x$

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} \quad \ldots \quad (3), \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{(n-1)\,[p]}} = \frac{i}{\sqrt{n-1}} \quad (4).$$

In der letzten Gleichung bedeutet

$$i = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{[p]}} \quad \ldots \quad (5)$$

den Trägheitsradius eines Massensystems in bezug auf seinen Schwerpunkt, das aus den $n$ die Einzelbeobachtungen versinnbildlichenden materiellen Punkten mit den Massen $p_\nu$ und den Abszissen $l_\nu$ besteht.

Es möge nun eine neue Beobachtung $l_{n+1}$ vom Gewichte $p_{n+1}$ hinzutreten, die von dem bisherigen Mittel $x$ um den Betrag

$$v_{n+1} = l_{n+1} - x \quad \ldots \quad (6)$$

abweicht. Das neue Mittel

$$x' = \frac{[p\,l] + p_{n+1}\,l_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad \ldots \quad (7)$$

ist gegenüber dem alten um den Betrag

$$\xi = x' - x = \frac{p_{n+1}\,v_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad \ldots \quad (8)$$

verschoben. Die neuen Werte der vorteilhaftesten Fehler ergeben sich durch die Beziehung

$$v' = v - \xi \quad \ldots \quad (9);$$

der vorteilhafteste Fehler der neu hinzugekommenen Lesung ist

$$v_{n+1}' = v_{n+1} - \xi = \frac{[p]\,v_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad \ldots \quad (10)$$

und die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Fehlerquadrate (das Trägheitsmoment)

$$[p\,v'^2] + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2 = [p\,v^2] + [p]\,\xi^2 + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2$$
$$= \frac{([p] + p_{n+1})\,[p\,v^2] + [p]\,p_{n+1}\,v_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \quad (11).$$

---

[1]) Das Zeichen [ ] wird in dieser Arbeit ausschließlich als Summenzeichen verwendet und deutet die von $\nu = 1$ bis $\nu = n$ sich erstreckende Summierung an. Das z. B. in den Gleichungen (52) verwendete Zeichen [ ]' ist ebenfalls Summenzeichen, bedeutet aber eine sich von $\nu = 1$ bis $\nu = n + 1$ erstreckende Summierung.

Der für die Güte der durch das Hinzutreten der $n+1$ten Lesung vervollständigten Beobachtungsreihe charakteristische mittlere Fehler der Gewichtseinheit $\mu'$ ist durch die Gleichung gegeben

$$\mu'^2 = \frac{[p v'^2] + p_{n+1} v_{n+1}'^2}{n} = \frac{([p] + p_{n+1})[p v^2] + [p] p_{n+1} v_{n+1}^2}{n([p] + p_{n+1})} \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

der neue Trägheitsradius $i'$ durch die Gleichung

$$i'^2 = \frac{[p v'^2] + p_{n+1} v_{n+1}'^2}{[p] + p_{n+1}} = \frac{([p] + p_{n+1})[p v^2] + [p] p_{n+1} v_{n+1}^2}{([p] + p_{n+1})^2} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und der mittlere Fehler $\mu_{x'}$ des neuen arithmetischen Mittels $x'$ durch die Gleichung

$$\mu_{x'}^2 = \frac{[p v'^2] + p_{n+1} v_{n+1}'^2}{n([p] + p_{n+1})} = \frac{([p] + p_{n+1})[p v^2] + [p] p_{n+1} v_{n+1}^2}{n([p] + p_{n+1})^2} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Güte der Beobachtungsreihe ist besser geworden, gleich geblieben oder verschlechtert worden, je nachdem $\mu'^2 \lesseqgtr \mu^2$, was für die Abweichung $v_{n+1}$ der neuen Lesung $l_{n+1}$ vom bisherigen Mittel die Bedingung liefert

$$p_{n+1} v_{n+1}^2 \lesseqgtr \frac{[p] + p_{n+1}}{(n-1)[p]} [p v^2] = \frac{[p] + p_{n+1}}{[p]} \mu^2 = \frac{[p] + p_{n+1}}{n-1} i^2 = ([p] + p_{n+1}) \mu_x^2 \quad . \quad (15).$$

Die Genauigkeit des Resultates der Messung hingegen ist eine bessere geworden, gleichgeblieben oder verschlechtert worden, je nachdem $\mu_{x'}^2 \lesseqgtr \mu_x^2$, was die Bedingung ergibt

$$p_{n+1} v_{n+1}^2 \lesseqgtr \frac{[p]^2 + (n+1)[p] p_{n+1} + n p_{n+1}^2}{(n-1)[p]^2} [p v^2] = \frac{[p]^2 + (n+1)[p] p_{n+1} + n p_{n+1}^2}{[p]^2} \mu^2$$

$$= \frac{[p]^2 + (n+1)[p] p_{n+1} + n p_{n+1}^2}{(n-1)[p]} i^2 = \frac{[p]^2 + (n+1)[p] p_{n+1} + n p_{n+1}^2}{[p]} \mu_x^2 \quad (16).$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die zuletzt angegebene Schranke immer größer ist als die Schranke der Bedingung (15).

Für das Kleinerwerden, Gleichbleiben oder Größerwerden des Trägheitsradius ($i'^2 \lesseqgtr i^2$) ist die Bedingung charakteristisch

$$v_{n+1}^2 = \frac{[p] + p_{n+1}}{[p]^2} [p v^2] = \frac{[p] + p_{n+1}}{[p]} i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Im Falle des Vorliegens von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen ist $p_1 = p_2 = \ldots p_n = p_{n+1} = 1$ und $[p] = n$. Für den Vergleich der Güte der vervollständigten und der alten Beobachtungsreihe ist dann die Bedingung kennzeichnend

$$v_{n+1}^2 \lesseqgtr \frac{n+1}{n(n-1)} [v^2] = \frac{n+1}{n} \mu^2 = \frac{n+1}{n-1} i^2 = (n+1) \mu_x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (15^*),$$

für den Vergleich der Genauigkeit des neuen und des alten Resultates

$$v_{n+1}^2 = \frac{2(n+1)}{n(n-1)} [v^2] = \frac{2(n+1)}{n} \mu^2 = \frac{2(n+1)}{n-1} i^2 = 2(n+1) \mu_x^2 \quad . \quad . \quad (16^*).$$

Der charakteristische Grenzwert der Abweichung der neu hinzugekommenen Beobachtung vom Mittel der bisherigen, der zu einer gleich genauen Bestimmung des Resultates führt, ist demnach im Falle von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen $\sqrt{2}$ mal größer als jener Grenzwert der Abweichung, der die Güte der Beobachtungsreihe unverändert läßt.

Schließlich ist der Trägheitsradius kleiner geworden, gleich geblieben oder größer geworden, je nachdem ob

$$v_{n+1}^2 \lesseqgtr \frac{n+1}{n^2} [v^2] = \frac{n+1}{n} i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17^*).$$

Als einfachstes Beispiel möge der Fall betrachtet werden, daß $n = 2$ gleichgewichtige Beobachtungen vorliegen. Ihre Abweichungen vom arithmetischen Mittel seien $v_1 = +1$ und $v_2 = -1$. Dann ist $[v^2] = 2$, $i = \pm 1$, $\mu \pm \sqrt{2}$, $\mu_x = \pm 1$. Soll bei Hinzutreten einer neuen Beobachtung von gleicher Genauigkeit, wie jede der beiden bisherigen der Trägheitsradius $i$ ungeändert bleiben, so muß $v_3 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, soll der mittlere Fehler $\mu$

einer Beobachtung sich nicht geändert haben, so muß $v_3 = \pm\sqrt{3}$ und soll schließlich die Genauigkeit des neuen Mittels dieselbe sein wie die des alten, so muß $v_3 = \pm\sqrt{6}$. Die Absolutwerte der drei charakteristischen Schranken verhalten sich somit wie $1 : \sqrt{2} : 2$.

**2. Vermittelnde Beobachtungen. Ausgleichsgerade und Fehlerhyperbel.** Das Problem der Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung soll nun in einem Falle vermittelnder Beobachtungen studiert werden, der in der praktischen Physik und besonders im Eichwesen eine wichtige Rolle spielt. Eine beobachtbare Größe sei in weitem Bereiche als lineare Funktion eines praktisch genommen in fehlerfreier Weise feststellbaren oder a priori bekannten Argumentes vorausgesetzt. Man denke z.B. an den einfachen Fall der Länge eines Metallstabes, deren Wert in vielen Fällen und in gewissen Bereichen eine lineare Funktion der so gut wie fehlerfrei feststellbaren Temperatur bildet, ein Fall, der von mir an andrer Stelle behandelt wurde[1]). Der hier anzustellenden Betrachtung soll insofern ein Fall allgemeinerer Natur zugrunde liegen, als den einzelnen Beobachtungen zunächst verschiedene Gewichte zugeschrieben werden. Es mögen $n$ Paare von Beobachtungen des fehlerfrei bestimmten Argumentes $(x_\nu)$ und des mit einem Fehler behafteten Funktionswertes $y_\nu$ vorliegen. $(\nu = 1, 2, \ldots n)$. Hierbei ist $n > 2$. Die $x_\nu$ sollen mindestens drei voneinander verschiedene Werte annehmen. Versteht man unter $v_\nu$ den »vorteilhaftesten Fehler«, unter $p_\nu$ das »Gewicht« der Beobachtung $y_\nu$, unter $A_0$ und $B_0$ die »vorteilheftesten Werte« der das lineare Abhängigkeitsgesetz kennzeichnenden Parameter $A$ und $B$, so erhält man aus $n$ »Fehlergleichungen« von der Form

$$v_\nu = A_0 + B_0 x_\nu - y_\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate die »Normalgleichungen«

$$[p]\, A_0 + [px]\, B_0 = [py], \qquad [px]\, A_0 + [px^2]\, B_0 = [pxy] \quad . \; . \; . \quad (19)$$

und das System der »Gewichtsgleichungen«

$$\left.\begin{array}{ll} [p]\, Q_{11} + [px]\, Q_{12} = 1, & [p]\, Q_{21} + [px]\, Q_{22} = 0 \\ [px]\, Q_{11} + [px^2]\, Q_{12} = 0, & [px]\, Q_{21} + [px^2]\, Q_{22} = 1 \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (20).$$

Um im weiteren die analytischen Ausdrücke kürzer und durchsichtiger zu gestalten, möge der Anfangspunkt der Zählung des Argumentes $x$ und der Funktion $y$ derart gewählt werden, daß

$$[px] = 0, \qquad [py] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21),$$

wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung keine Einbuße erleidet. Argument und Funktion werden einfach durch die Abweichung von ihrem Mittelwerte gekennzeichnet. Versinnbildlicht man jedes Beobachtungspaar durch eine Punktmasse $p_\nu$ mit den Rechtwinkelkoordinaten $x_\nu$, $y_\nu$, so bewirkt die Festsetzung (21), daß der Schwerpunkt des aus diesen Punktmassen bestehenden Massensystems, des sogenannten »Beobachtungsbildes« Ursprung des Koordinatensystems wird. Die Normalgleichungen und die Gewichtsgleichungen besitzen sodann die einfachen Lösungen

$$A_0 = 0, \qquad B_0 = \frac{[pxy]}{[px^2]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22);$$

$$Q_{11} = \frac{1}{[p]}, \quad Q_{12} = Q_{21} = 0\,, \quad Q_{22} = \frac{1}{[px^2]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Die das vorteilhafteste Abhängigkeitsgesetz versinnbildlichende »Ausgleichsgerade«

$$\mathfrak{y} = A_0 + B_0 x = \frac{[pxy]}{[px^2]}\, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

ist der zur $y$-Achse konjugierte Diameter der als »Standardellipse« bezeichneten Zentralellipse des Beobachtungsbildes

$$[p]\,\{[py^2]\, x^2 - 2\,[pxy]\, xy + [px^2]\, y^2\} = [px^2]\,[py^2] - [pxy]^2 \quad ^{2)} \quad (25).$$

[1]) A. Basch, die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbel. Oesterr. Zeitschr für Vermessungswesen 19. 1921. S. 38 bis 46.

[2]) Vergl. A. Basch, Ueber eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen. Mitteilungen des Technischen Versuchsamtes I, 1912, 2. H., S. 25 bis 30; 3. H., S. 32 bis 41. Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 11, 1913. S. 11 bis 18, und S. 42 bis 46. Daselbst auch weitere Literaturangaben über diesen auf Bravais (1846) rückführbaren Satz und seine Anwendungen. Vergl. a. P. Werkmeister, diese Zeitschr. 1. 1921, S. 491 bis 494.

Die zum Minimum gemachte Fehlerquadratsumme

$$[p v^2] = \frac{[p x^2]\,[p y^2] - [p x y]^2}{[p x^2]} = [p]\,\bar{i}_y^{\,2} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

ist das Binetsche (nicht das orthogonale!) Trägheitsmoment des Beobachtungsbildes in bezug auf die Ausgleichsgerade. (Die Abstände werden nicht in der zu der betreffenden Geraden senkrechten, sondern in der zu ihr vermittelst der Zentralellipse konjugierten Richtung gemessen.) $\bar{i}_y$ ist der Binetsche Trägheitsradius in bezug auf die Ausgleichsgerade oder die Größe des Halbdiameters in der $y$-Richtung.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$\mu = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-2}} = i_y \sqrt{\frac{[p]}{n-2}} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

und der mittlere Fehler in den Bestimmungen $A_0$ und $B_0$ der unbestimmten und unbestimmt bleibenden Parameter $A$ und $B$

$$\mu_A = \mu \sqrt{Q_{11}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \quad \mu_B = \mu \sqrt{Q_{22}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p x^2]}} = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\bar{i}_y}{i_x} \quad . \quad (28).$$

Hierbei ist $i_x$ der durch die Gleichung

$$i_x^2 = \frac{[p x^2]}{[p]} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

definierte Trägheitsradius des Beobachtungsbildes in bezug auf die $y$-Achse.

Der mittlere Fehler $\mu_{\mathfrak{y}}$ in der Bestimmung des Funktionswertes

$$\mathfrak{y} = A x + B \quad \ldots\ldots \quad (30),$$

dessen vorteilhaftester Wert durch Gleichung (24) gegeben ist, wird nach dem Fehlerübertragungsgesetz durch die Gleichung bestimmt

$$\mu_{\mathfrak{y}}^2 = \mu_A^2 + \mu_B^2 x^2 = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x^2}{[p x^2]} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (31).$$

Für $x = 0$ ist die in der Bestimmung der Funktion erzielte Genauigkeit dieselbe, wie wenn alle Beobachtungen bei diesem Argumente stattgefunden hätten.

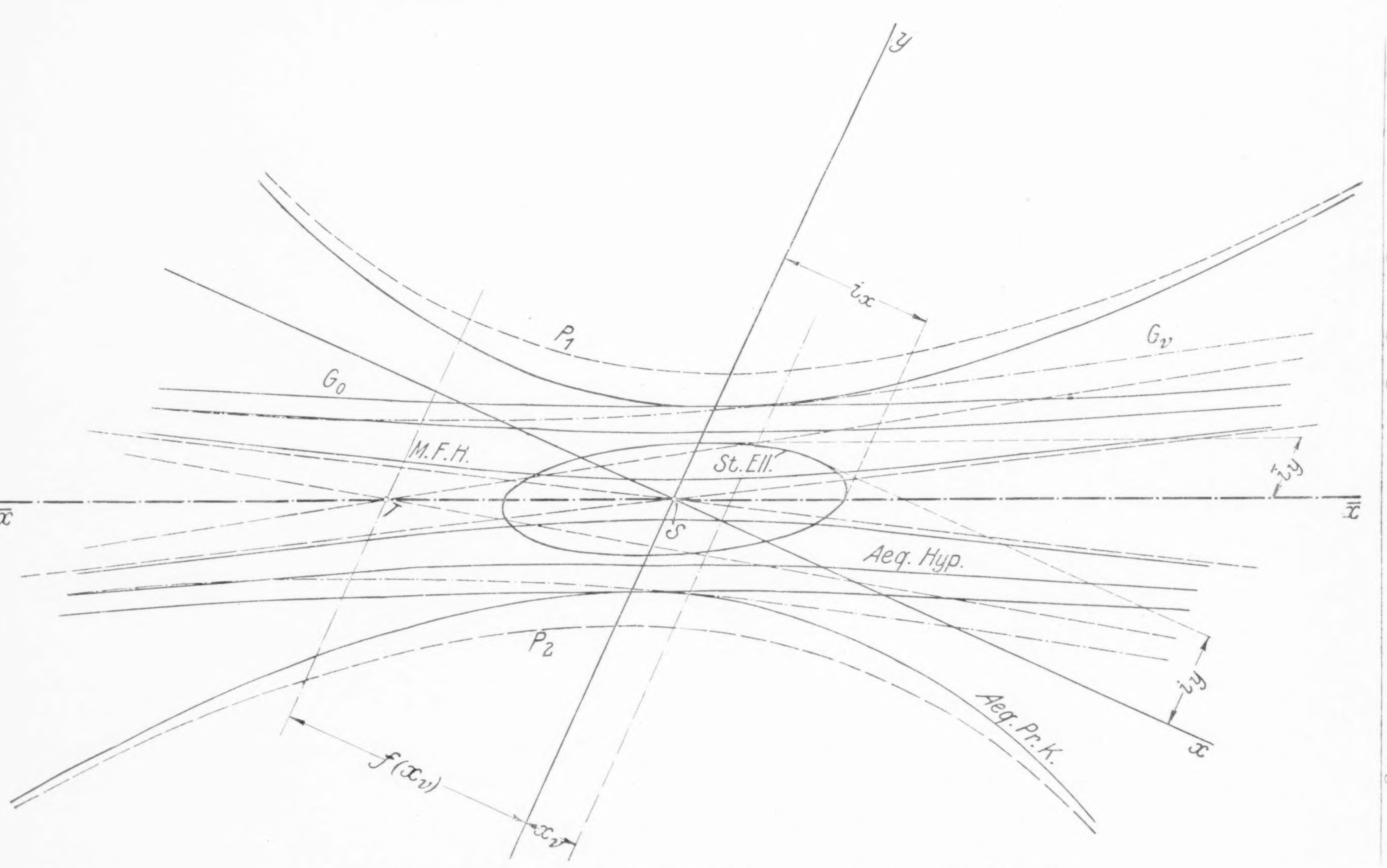
Führt man in (31) die Trägheitsradien $i_x$ und $\bar{i}_y$ ein, so erhält man nach einfacher Umformung

$$\frac{\mu_{\mathfrak{y}}^2}{\frac{1}{n-2}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{i_x^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (32),$$

die Gleichung der »mittleren Fehlerhyperbel«, die sinngemäß derart einzuzeichnen wäre, daß unter der Abszisse $x$, $\mu_{\mathfrak{y}}$ von der Ausgleichsgeraden nach oben und unten hin parallel zur $y$-Achse aufgetragen wird[1]).

In der Abbildung stellt *St.Ell.* die »Standardellipse« einer Beobachtungsreihe vor. $S$ ist der Schwerpunkt des Beobachtungsbildes. Der zur $y$-Achse konjugierte Diameter $x x$ ist dann die »Ausgleichsgerade«. Unter der auch weiterhin festzuhaltenden Annahme, daß die Beobachtungsreihe aus $n = 10$ gleichgewichtigen Beobachtungen besteht, ist der Halbdiameter der $y$ Richtung der mittleren Fehlerhyperbel $(M.F.H) = \frac{1}{\sqrt{8}}\,i_y = 0{,}354\,i_y$.

[1]) Die »mittlere Fehlerhyperbel« wird hier als »Punktort« bestimmt. Vergl. auch R. Schumann, »Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate«. Sitzungsber. Akad. Wien, Bd. CXXV, Abt. IIa, 1916, S. 1429 bis 1466. Bezüglich ihrer Bedeutung als »Strahlort« vergl. A. Basch, »Ueber Hyperbeln beziehungsweise Hyperboloide als Präzisionscharakteristika empirisch bestimmter linearer Funktionen«. Sitzungsber. Akad. Wien, Bd. CXIII, Abt. IIa, 1914, S. 1659 bis 1678. In dieser Arbeit wurden die »Normalgleichungen [hier mit (19), dort mit (7) bezeichnet] in vollkommen zulässiger Weise durch $[p]$ dividiert. Unzulässigerweise wurden aber die mittleren Fehler der Parameter $A$ und $B$ aus dem Koeffizientensystem dieser durch $[p]$ dividierten »Normalgleichungen« und nicht aus den richtigen, hier mit (20) bezeichneten »Gewichtsgleichungen« bestimmt. Hierdurch hat der Diameter der $y$-Richtung der »mittleren Fehlerhyperbel« einen $\sqrt{[p]}$ mal zu großen Wert erhalten. Dieser Irrtum ist auch in meine früher zitierte Arbeit »Die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbeln«, Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 19, 1921, S. 38 bis 46 übergegangen.




Ausgleichsgerade, Standard-Ellipse, Aequivalenzhyperbel und Aequipräzisionskurve einer Beobachtungsreihe.

**3. Genauigkeitssteigerung des errechneten gegenüber dem unmittelbar beobachteten Funktionswert.** Es soll zunächst gezeigt werden, daß die Genauigkeit des berechneten Wertes der Funktion für irgend einen beliebigen Wert des Argumentes $x_\nu$ auf jeden Fall, d. h. bei beliebiger Verteilung der Argumente, bei denen Beobachtungen angestellt wurden, und bei beliebiger Verteilung der Gewichte größer ist, als wenn einzig und allein die eine Beobachtung bei dem Argument $x_\nu$ erfolgt wäre, d. h.

$$\mu^2_{y_\nu} > \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Es ist

$$\mu^2_{y_\nu} = \frac{\mu^2}{p_\nu} \quad \ldots \quad (34), \qquad \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]} \right\} \quad \ldots \quad (35).$$

Somit müßte die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{p_\nu} > \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

erwiesen werden, was geschehen ist, wenn der Beweis für das Maximum des Ausdruckes auf der rechten Seite oder für das Minimum von $[p x^2]$ erbracht worden ist, wobei aber die Bedingung $[p x] = 0$ eingehalten werden muß. Es handelt sich demnach, der Lagrangeschen Methode der unbestimmten Koeffizienten entsprechend, zunächst darum, das absolute Minimum von

$$[p x^2] - 2 \lambda [p x] = F(x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots x_n) \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

zu bestimmen. $x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots x_n$ sind hierbei als die variablen Argumente der Funktion $F$ anzusehen, während $x_\nu$ als von vornherein gegeben betrachtet werden muß. Nunmehr ergeben sich

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_1} = p_1 x_1 - \lambda p_1 = 0\,, & \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = p_2 x_2 - \lambda p_2 = 0\,, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_{\nu-1}} = p_{\nu-1} x_{\nu-1} - \lambda p_{\nu-1} = 0\,, & \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_{\nu+1}} = p_{\nu+1} x_{\nu+1} - \lambda p_{\nu+1} = 0\,, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_n} = p_n x_n - \lambda p_n = 0\,, & \\
p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{\nu-1} x_{\nu-1} + p_{\nu+1} x_{\nu+1} + \ldots + p_n x_n = - p_\nu x_\nu &
\end{array}\right\} \quad (38),$$

demnach im ganzen $n$ lineare, nicht homogene Gleichungen zur Bestimmung der $n-1$ gesuchten Abszissen und des unbestimmten Multiplikators $\lambda$ und die Lösung lautet

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{\nu-1} = x_{\nu+1} = \ldots x_n = \lambda = - \frac{p_\nu x_\nu}{[p] - p_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (39).$$

Da ferner

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_s^2} = p_s > 0\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \, \partial x_t} = 0\,, \qquad (s, t = 1, 2, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots n) \quad (40),$$

so liegt tatsächlich ein Minimum vor von dem Betrage

$$\mathrm{Min}\,[p x^2] = \frac{[p]\, p_\nu}{[p] - p_\nu} x_\nu^2 \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

und es ist weiter

$$\mathrm{Max} \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]} \right\} = \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{\mathrm{Min}\,[p x^2]} = \frac{1}{p_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (42).$$

In diesem äußersten Falle tritt somit in (36) an Stelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen und es ist $\mu^2_{y_\nu} = \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu}$. In jedem anderen Falle, d. h. bei jeder anderen Argumentverteilung, ist tatsächlich $\mu^2_{y_\nu} > \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu}$. Der extreme Fall scheint aber von vornherein ausgeschlossen, da in ihm nur zwei voneinander verschiedene Werte des Argumentes, nämlich $x_\nu$ und $\lambda = - \frac{p_\nu x_\nu}{[p] - p_\nu}$ vorliegen. Es wäre dies eben kein »über-

bestimmter« Fall, sondern der »bestimmte« Grenzfall, in dem eine Genauigkeitssteigerung nicht eintreten kann. Für den Fall von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen ist der mittlere Fehler eines berechneten Wertes durch die Gleichung gegeben

$$\mu^2_{y_\nu} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{x_\nu^2}{[x^2]} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35^*).$$

Bei einer Reihe solcher in bezug auf das Argument $x$ äquidistanter Beobachtungen mit dem Abstand $a$ ist bei ungerader Anzahl $n$ der Beobachtungen

$$[x^2] = 2\,a^2 \left\{ 1^2 + 2^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{1}{12}\, n\,(n^2-1)\,a^2 \quad . \; . \quad (43\,\mathrm{a})$$

und bei gerader Anzahl im Endergebnis übereinstimmend

$$[x^2] = \frac{1}{2} \left\{ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (n-1)^2 \right\} a^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2 \right\} - 4 \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 \right\} \right\} a^2$$

$$= \frac{1}{12}\, n\,(n^2-1)\,a^2 \quad (43\,\mathrm{b}).$$

Der Abstand des $\nu$ten Punktes, von der Mitte an gerechnet, ist bei ungerader bezw. gerader Zahl der Beobachtungen

$$x_\nu = \nu\,a \quad . \; . \; . \quad (44\,\mathrm{a}), \qquad x_\nu = \pm \frac{2\,|\nu| - 1}{2}\, a \quad . \; . \quad (44\,\mathrm{b}):$$

somit gilt für ungerade bezw. gerade $n$

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} = \frac{\mu^2}{n} \left\{ 1 + \frac{12\,\nu^2}{n^2-1} \right\} \quad . \quad (45\,\mathrm{a}), \qquad \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} = \frac{\mu^2}{n} \left\{ 1 + \frac{3\,(2\,|\nu| - 1)^2}{n^2-1} \right\} \quad (45\,\mathrm{b}).$$

Naturgemäß ist die Genauigkeitssteigerung für die Randpunkte am geringsten. Für diese ist bei ungerader Beobachtungszahl $|\nu| = r = \frac{n-1}{2}$ und bei gerader Beobachtungszahl $|\nu| = r = \frac{n}{2}$. Es ergibt sich somit übereinstimmend für ungerade und für gerade Beobachtungszahlen für den mittleren Fehler des berechneten Funktionswertes für die Randpunkte

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_r} = \frac{2\,(2\,n-1)}{n\,(n+1)}\, \mu^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Die folgende Zahlentafel gibt das Verhältnis $\mu_{\mathfrak{y}_r} : \mu$ für verschiedene Beobachtungszahlen.

| $n$ | $\mu_{\mathfrak{y}_r} : \mu$ | $n$ | $\mu_{\mathfrak{y}_r} : \mu$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 7 | 0,6814 |
| 2 | 1,0000 | 8 | 0,6455 |
| 3 | 0,9129 | 9 | 0,6146 |
| 4 | 0,8367 | 10 | 0,5878 |
| 5 | 0,7746 | 11 | 0,5641 |
| 6 | 0,7237 | 12 | 0,5430 |

Daß in den nicht »überbestimmten« Fällen $n = 1$ und $n = 2$ keine Genauigkeitssteigerung eintritt, daher $\mu_{\mathfrak{y}_r} = \mu$ ist, war ja von vornherein selbstverständlich. Für sehr große Beobachtungszahlen wird

$$\mu_{\mathfrak{y}_r} = \frac{2}{\sqrt{n}}\, \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

also doppelt so groß, wie wenn alle Beobachtungen bei dem Argumente des Randpunktes stattgefunden hätten.

### 4. Verbesserung der gesamten Beobachtungsreihe. Aequivalenzhyperbel.

Für den mittleren Fehler $\mu$ der Gewichtseinheit besteht, wie aus der Verbindung von (26) und (27) hervorgeht, die Gleichung

$$\mu^2 = \frac{[p\,v^2]}{n-2} = \frac{[p\,x^2]\,[p\,y^2] - [p\,x\,y]^2}{(n-2)\,[p\,x^2]} = \frac{[p]}{n-2}\,\bar{i}_y{}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48).$$

Tritt nun eine neue Beobachtung vom Gewichte $p_{n+1}$ hinzu mit den Koordinaten $x_{n+1}$, $y_{n+1}$ in bezug auf den alten Schwerpunkt $S$ des Beobachtungsbildes, so verschiebt sich der Schwerpunkt nach dem Punkt $S'$ mit den Koordinaten

$$\xi = \frac{p_{n+1}}{[p] + p_{n+1}}\,x_{n+1}\,, \qquad \eta = \frac{p_{n+1}}{[p] + p_{n+1}}\,y_{n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49).$$

Die Koordinaten in bezug auf ein zu dem alten System $x\,y$ paralleles System $x'\,y'$ durch den neuen Schwerpunkt $S'$ sind

$$x' = x - \xi\,, \qquad y' = y - \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50),$$

somit

$$x_{n+1}' = \frac{[p]}{[p] + p_{n+1}}\,x_{n+1}\,, \qquad y_{n+1}' = \frac{[p]}{[p] + p_{n+1}}\,y_{n+1} \quad . \; . \; . \quad (51)$$

und das neue Beobachtungsbild besitzt in bezug auf das neue Achsensystem die Massenmomente zweiten Grades

$$\left.\begin{aligned} [p x'^2]' &= [p x^2] + [p]\,\xi^2 + p_{n+1}\,x_{n+1}'^2 = \frac{([p] + p_{n+1})\,[p x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \\ [p y'^2]' &= [p y^2] + [p]\,\eta^2 + p_{n+1}\,y_{n+1}'^2 = \frac{([p] + p_{n+1})\,[p y^2] + [p]\,p_{n+1}\,y_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \\ [p x' y']' &= [p x y] + [p]\,\xi\,\eta + p_{n+1}\,x_{n+1}\,y_{n+1} = \frac{([p] + p_{n+1})\,[p x y] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}\,y_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad (52).$$

Der neue mittlere Fehler $\mu'$ der Gewichtseinheit wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} \mu'^2 &= \frac{[p x'^2]'\,[p y'^2]' - [p x' y']'^2}{(n-1)\,[p x'^2]'} \\ &= \frac{([p] + p_{n+1})\,([p x^2]\,[p y^2] - [p x y]^2) + [p]\,p_{n+1}\,([p y^2]\,x_{n+1}^2 + [p x^2]\,y_{n+1}^2 - 2\,[p x y]\,x_{n+1}\,y_{n+1})}{(n-1)\,\{([p] + p_{n+1})\,[p x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2} \\ &= \frac{[p]}{n-1} \cdot \frac{([p] + p_{n+1})\,\bar{i}_y{}^2 + p_{n+1}\,([p y^2]\,x_{n+1}^2 + [p x^2]\,y_{n+1}^2 - 2\,[p x y]\,x_{n+1}\,y_{n+1})}{([p] + p_{n+1})\,[p x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2} \quad . \; . \quad (53). \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\mu'^2$ dem letzten Ausdruck in (48) für $\mu^2$ gleich und sieht $x_{n+1}$, $y_{n+1}$ als laufende Koordinaten an, so erhält man die Gleichung des Ortes aller Punkte, die solche Beobachtungen vom Gewichte $p_{n+1}$ veranschaulichen, die durch ihr Hinzutreten zu den bisherigen Beobachtungen an der Güte der Beobachtungsreihe nichts ändern. Es erweist sich hierbei als vorteilhaft zu dem durch die Gleichungen

$$x = x_{n+1}\,, \quad \bar{y} = y_{n+1} - B_0\,x_{n+1} = y_{n+1} - \frac{[p x y]}{[p x^2]}\,x_{n+1} \quad . \; . \; . \quad (54)$$

definierten schiefwinkligen Koordinatensystem überzugehen, das heißt die Lage eines jeden Punktes wird durch seine bisherige Abszisse und durch seinen in der Richtung der $y$-Achse gemessenen Abstand $\bar{y}$ von der »Ausgleichsgeraden« $\bar{x}\bar{x}$ gekennzeichnet. Dann ist

$$\mu'^2 = \frac{[p]}{n-1} \cdot \frac{([p] + p_{n+1})\,i_x{}^2\,\bar{i}_y{}^2 + p_{n+1}\,(\bar{i}_y{}^2\,x^2 + i_x{}^2\,\bar{y}^2)}{([p] + p_{n+1})\,i_x{}^2 + p_{n+1}\,x^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (55)$$

und das Gleichsetzen mit $\mu^2 = \frac{[p]}{n-2}\,\bar{i}_y{}^2$ ergibt als Gleichung der Ortskurve

$$\frac{\bar{y}^2}{\dfrac{[p] + p_{n+1}}{(n-2)\,p_{n+1}}\,\bar{i}_y{}^2} - \frac{x^2}{\dfrac{[p] + p_{n+1}}{p_{n+1}}\,i_x{}^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56),$$

die demnach eine Hyperbel ist, die als »Aequivalenzhyperbel« bezeichnet werden möge. Vergleicht man die Gleichungen (56) und (32), so ersieht man: »die Aequivalenzhyperbel geht aus der mittleren Fehlerhyperbel durch zentrische

Streckung (Aehnlichkeits-Transformation) aus dem Mittelpunkte im Verhältnis $\sqrt{([p]+p_{n+1}):p_{n+1}}$ hervor«.

In dem besonderen Fall von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen lautet die Gleichung der »Aequivalenzhyperbel«

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{n+1}{n-2}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{(n+1)\,i_x^{\,2}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56^*).$$

Die Aequivalenzhyperbel ergibt sich in diesem besonderen Falle aus der mittleren Fehlerhyperbel durch zentrische Streckung im Verhältnis $\sqrt{n+1}$.

In der Abbildung ist *Aeq. Hyp.* die Aequivalenzhyperbel. Sie ist die $\sqrt{11}$ fache Vergrößerung der mittleren Fehlerhyperbel und mit ihr ähnlich liegend, hat daher mit ihr gemeinsame, in der Figur strichlierte Asymptoten. Ihr Halbdiameter in der $y$-Richtung ist $\sqrt{\frac{11}{8}}\,\bar{i}_y = 1{,}173\,\bar{i}_y$.

Liegt der eine neue Beobachtung vom Gewichte $p_{n+1}$ veranschaulichende Punkt derart, daß von ihm aus reelle Tangenten an die Aequivalenzhyperbel gezogen werden können, so ist die Güte der Beobachtungsreihe verbessert, im entgegengesetzten Falle ist sie verschlechtert worden.

Der Vollständigkeit halber sei noch Folgendes erwähnt: Hätte man nach dem Ort von Massenpunkten $p_{n+1}$ gefragt, die durch ihr Hinzutreten zu dem Massensystem der $n$ Punkte $p_1$ bis $p_n$ den Diameter der Zentralellipse des Systems in der $y$-Richtung der Größe nach nicht ändern, so hätte man die Gleichung erhalten

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{[p]+p_{n+1}}{[p]}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{\frac{[p]+p_{n+1}}{p_{n+1}}\,i_x^{\,2}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57),$$

also die Gleichung einer Hyperbel, die durch lineare Dilatation im Verhältnis $\sqrt{(n-2)\,p_{n+1}:[p]}$ (bei gleichgewichtigen Beobachtungen $\sqrt{(n-2):n}$) in der Richtung der $y$-Achse bei ungeänderten Strecken in der Richtung der Ausgleichsgeraden aus der Aequivalenzhyperbel hervorgeht.

**5. Genauigkeitssteigerung des errechneten Funktionswertes. Grenzkurven und Aequipräzisionskurve.** Der mittlere Fehler $\mu_{\mathfrak{y}_\nu}$ des vorteilhaftesten Wertes $\mathfrak{y}_\nu$, der durch Ausgleichung aus $n$ Beobachtungen gerechnet wurde, ist zufolge (35) und (48) unter Berücksichtigung von (29) durch die Gleichung gegeben

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^{\,2}}{[p x^2]} \right\} = \frac{(i_x^{\,2} + x_\nu^{\,2})\,\bar{i}_y^{\,2}}{(n-2)\,i_x^{\,2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Durch Hinzutreten der neuen Beobachtung $p_{n+1}$, $x_{n+1}$, $y_{n+1}$ entsteht für das Argument $x_\nu$ der neue vorteilhafteste Wert $\mathfrak{y}_\nu'$ mit dem mittleren Fehler $\mu_{\mathfrak{y}_\nu'}$, der sich aus der Gleichung ergibt

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu'} = \mu'^2 \left\{ \frac{1}{[p]+p_{n+1}} + \frac{x_\nu'^{\,2}}{[p x'^2]'} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Hierbei ist

$$x_\nu' = x_\nu - \xi = x_\nu - \frac{p_{n+1}}{[p]+p_{n+1}}\,x_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

$[p x'^2]'$ geht aus (52), $\mu'^2$ aus (55) hervor. Hieraus ergibt sich

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu'} = \frac{\{([p]+p_{n+1})\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2} + p_{n+1}\,(\bar{i}_y^{\,2} x^2 + i_x^{\,2}\bar{y}^2)\}\,\{[p]\,i_x^{\,2} + ([p]+p_{n+1})\,x_\nu'^{\,2} - 2\,p_{n+1}\,x_\nu x + p_{n+1}\,x^2\}}{(n-1)\,\{([p]+p_{n+1})\,i_x^{\,2} + p_{n+1}\,x^2\}^2} \quad (61)$$

(die auf das schiefwinklige System $x\bar{y}$ bezogenen Koordinaten des neu hinzugekommenen Punktes $(x, \bar{y})$ sind hier schon als »laufende« betrachtet). Setzt man die Ausdrücke für $\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu}$ und $\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu'}$ in (58) und (61) einander gleich, so erhält man die Gleichung des Ortes aller Punkte, die solche Beobachtungen vom Gewichte $p_{n+1}$ veranschaulichen, die durch

ihr Hinzutreten zu den bisherigen Beobachtungen an der Genauigkeit des zu dem Argumente $x_\nu$ gehörigen Funktionswertes $\mathfrak{y}_\nu$ nichts ändern. Diese Gleichung lautet

$$\begin{aligned} & p_{n+1}^2 \bar{i}_y^2 (i_x^2 + (n-1) x_\nu^2) x^4 - (n-2) p_{n+1}^2 i_x^4 x^2 \bar{y}^2 + 2(n-2) p_{n+1}^2 i_x^2 \bar{i}_y^2 x_\nu x^3 \\ & + 2(n-2) p_{n+1}^2 i_x^4 x_\nu x y^2 + p_{n+1} i_x^2 \bar{i}_y^2 \{(2[p] + n p_{n+1}) i_x^2 + n([p] + p_{n+1}) x_\nu^2\} x^2 \\ & - (n-2) p_{n+1} i_x^4 \{[p] i_x^2 + ([p] + p_{n+1}) x_\nu^2\} y^2 + 2(n-2) p_{n+1} ([p] + p_{n+1}) i_x^4 \bar{i}_y^2 x_\nu x \\ & + ([p] + p_{n+1}) i_x^4 \bar{i}_y^2 \{([p] + (n-1) p_{n+1}) i_x^2 + ([p] + p_{n+1}) x_\nu^2\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62). \end{aligned}$$

Die durch sie gekennzeichnete »Grenzkurve« ($G_\nu$ in der Abbildung) ist eine nicht zerfallende Kurve vierter Ordnung. Sie besitzt neben zwei imaginären, zur Ordinatenachse parallelen Asymptoten, die durch die Gleichung

$$p_{n+1} x^2 - 2 p_{n+1} x_\nu x + [p] i_x^2 + ([p] + p_{n+1}) x_\nu^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

gegeben sind, zwei reelle, zur Ordinatenachse geneigte Asymptoten, deren Richtungskoeffizienten $\alpha$ bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem aus der Gleichung hervorgehen

$$\varphi_4(\alpha) = p_{n+1}^2 \{\bar{i}_y^2 (i_x^2 + (n-1) x_\nu^2) - (n-2) i_x^4 \alpha^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

als

$$\alpha = \pm \frac{\bar{i}_y}{i_x^2} \sqrt{\frac{i_x^4 + (n-1) x_\nu^2}{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65);$$

ihr Schnitt auf der Ordinatenachse ist

$$\beta = -\frac{\varphi_3(\alpha)}{\varphi_4'(\alpha)} = \pm \frac{(n-1) \bar{i}_y (i_x^2 + x_\nu^2)}{i_x^2 \sqrt{(n-2)\{i_x^2 + (n-1) x_\nu^2\}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Die Gleichung der reellen Asymptoten lautet demnach:

$$\bar{y} = \alpha x + \beta = \pm \frac{\bar{i}_y}{i_x^2} \sqrt{\frac{i_x^2 + (n-1) x_\nu^2}{n-2}} \left\{ x + \frac{(n-1)(i_x^2 + x_\nu^2)}{i_x^2 + (n-1) x_\nu^2} x_\nu \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

Diese Asymptoten schneiden einander in einem Punkte ($T$) der Ausgleichsgeraden; die Abszisse des Schnittpunktes $f(x_\nu)$ hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie $x_\nu$. Die »Grenzkurve« besteht aus zwei Aesten. Die Punkte gleicher Abszisse haben, da $y$ in der Kurvengleichung (62) nur in zweiter Potenz vorkommt, von der Ausgleichsgeraden gleichen Abstand. Beobachtungen vom Gewichte $p_{n+1}$, deren Bildpunkte zwischen den beiden Aesten der zu einem bestimmten Werte von $x_\nu$ gehörigen Grenzkurve $G_\nu$ liegen, vergrößern die Genauigkeit des zu diesem Argumentwerte $x_\nu$ gehörigen Funktionswertes $\mathfrak{y}_\nu$; Beobachtungen, deren Bildpunkte außerhalb der beiden Aeste liegen, verkleinern diese Genauigkeit.

Zwei bestimmte Fälle sind von besonderem Interesse:

1. $x_\nu = 0$, d. h.: Wie muß die neue Beobachtung beschaffen sein, damit die Genauigkeit des zum Mittelwert der Argumente gehörigen Funktionswertes vergrößert wird, gleich bleibt oder verkleinert wird? Die Gleichung der Grenzkurve $G_0$ lautet in diesem Falle

$$\begin{aligned} & p_{n+1}^2 \bar{i}_y^2 x^4 - (n-2) p_{n+1}^2 i_x^2 x^2 \bar{y}^2 + p_{n+1} (2[p] + n p_{n+1}) i_x^2 \bar{i}_y^2 x^2 \\ & - (n-2) [p] p_{n+1} i_x^4 \bar{y}^2 + ([p] + p_{n+1}) ([p] + (n-1) p_{n+1}) i_x^4 \bar{i}_y^2 = 0 \quad (68). \end{aligned}$$

Diese Grenzkurve, die als »zentrale Grenzkurve« bezeichnet werden möge, besitzt neben zwei imaginären zur $y$-Achse parallelen und von ihr gleich weit entfernten Asymptoten

$$p_{n+1} x^2 + [p] i_x^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

zwei reelle Asymptoten

$$\bar{Y} = \pm \frac{1}{\sqrt{n-2}} \frac{\bar{i}_y}{i_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

die, wie leicht zu ersehen ist, mit den Asymptoten der mittleren Fehlerhyperbel und der Aequivalenzhyperbel identisch sind. Diese beiden Hyperbeln sind daher auch asymptotische Kurven der zentralen Grenzkurve. Die Schnitte der mittleren Fehlerhyperbel, der Aequivalenzhyperbel und der zentralen Grenzkurve auf der $y$-Achse sind der Reihe nach

$$\pm \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \pm \sqrt{\frac{[p] + p_{n+1}}{p_{n+1}}} \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \pm \sqrt{\frac{([p] + (n-1) p_{n+1})([p] + p_{n+1})}{[p] p_{n+1}}} \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}} \quad . \quad (71).$$

Es ist somit jeder später genannte dem Absolutbetrag nach größer als der früher angeführte. Die zentrale Grenzkurve selbst hat ein vollends hyperbelartiges Aussehen.

2. $x_\nu = x$, d. h.: Wie müssen Beobachtungen beschaffen sein, damit die Genauigkeit des zu dem beobachteten Argumentwerte gehörigen Funktionswertes vergrößert wird, gleich bleibt oder verkleinert wird? Die Gleichung des Ortes der Bildpunkte der Beobachtungen, die gleiche Genauigkeit ergeben, der als »Aequipräzisionskurve« bezeichnet werden möge, erscheint zunächst als von sechster Ordnung und lautet

$$\begin{aligned}(n-1)\,p_{n+1}^2\,\bar{i}_y^2\,x^6 + p_{n+1}\,\{n\,[p] + 3\,(n-1)\,p_{n+1}\}\,i_x^2\,\bar{i}_y^2\,x^4 - (n-2)\,[p]\,p_{n+1}\,i_x^4\,x^2\,y^2 \\ + \{[p]^2 + 2\,n\,[p]_{n+1} + 3\,(n-1)\,p_{n+1}^2\}\,i_x^4\,\bar{i}_y^2\,x^2 - (n-2)\,[p]\,p_{n+1}\,i_x^6\,y^2 \\ + ([p] + p_{n+1})\,\{[p] + (n-1)\,p^n{}_{+1}\}\,i_x^6\,\bar{i}_y^2 = 0 \quad (72).\end{aligned}$$

Sie zerfällt aber in die Gleichung des imaginären Parallelgeradenpaares

$$x^2 + i_x^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

und in die Gleichung

$$\begin{aligned}\bar{y}^2 = \frac{\bar{i}_y^2}{(n-2)\,[p]\,p_{n+1}\,i_x^4}\,\Big\{(n-1)\,p_{n+1}^2\,x^4 + p_{n+1}\,(n\,[p] + 2\,(n-1)\,p_{n+1})\,i_x^2\,x^2 \\ + ([p] + p_{n+1})\,([p] + (n-1)\,p_{n+1})\,i_x^4\Big\} \quad (74).\end{aligned}$$

Die Aequipräzisionskurve (*Aeq. Pr. K.* in der Abbildung) ist somit eine zweiästige Kurve vierter Ordnung. Zu jedem Wert von $x$ gehören zwei reelle, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, dem Absolutbetrag nach gleiche Werte von $\bar{y}$. Ebenso gehören zu jedem dem Absolutbetrage nach die Ordinaten der Schnittpunkte mit der $y$-Achse (die mit jenen der »zentralen Grenzkurve« identisch sind) überschreitenden Werte von $\bar{y}$ zwei reelle, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, dem Absolutbetrage nach gleich große Werte von $x$.

Entwickelt man $\bar{y}$ für große Werte von $x$ und vernachlässigt hierbei Glieder, die $\frac{i_x^2}{x^2}$ als Faktor enthalten, so ist zu erkennen, daß die »Aequipräzisionskurve« die beiden Parabeln

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \pm \sqrt{\frac{(n-1)\,p_{n+1}}{(n-2)\,[p]}}\,\bar{i}_y\,\left\{\frac{n\,[p] + 2\,(n-1)\,p_{n+1}}{2\,(n-1)\,p_{n+1}} + \frac{x^2}{i_x^2}\right\} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(n-1)\,p_{n+1}}{[p]}}\,\mu_A\,\left\{\frac{n\,[p] + 2\,(n-1)\,p_{n+1}}{2\,(n-1)\,p_{n+1}} + \frac{x^2}{i_x^2}\right\} \quad (75)\end{aligned}$$

($P_1$ und $P_2$ in der Abbildung) als asymptotische Kurven besitzt. Beobachtungen vom Gewichte $p_{n+1}$, deren Bildpunkte zwischen den beiden Aesten der Aequipräzisionskurve liegen, vergrößern die Genauigkeit des zu ihrer Argumentenabszisse berechneten Funktionswertes, Beobachtungen, deren Bildpunkte außerhalb liegen, verkleinern sie.

Für den besonderen Fall, daß lauter gleichgewichtige Beobachtungen vorliegen, ist der mittlere Fehler des zum Argumente $x_\nu$ nach Hinzutreten einer $n+1$ten Beobachtung $x$, $\bar{y}$ vom Gewichte Eins gehörigen Funktionswertes durch die Gleichung gegeben

$$\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu'} = \frac{\{(n+1)\,i_x^2\,\bar{i}_y^2 + \bar{i}_y^2\,x^2 + i_x^2\,\bar{y}^2\}\,\{n\,i_x^2 + (n+1)\,x_\nu^2 - 2\,x_\nu\,x + x^2\}}{(n-1)\,\{([p] + p_{n+1})\,i_x^2 + x^2\}} \quad . \quad . \quad (61^*),$$

während für den mittleren Fehler des aus den $n$ ersten Beobachtungen errechneten Funktionswertes die Gleichung (58) ungeändert bleibt. Die Gleichung der aus der Bedingung $\mu^2_{\mathfrak{y}_\nu} = \mu^2_{\mathfrak{y}_\nu'}$ hervorgehenden allgemeinen Grenzkurve $G_\nu$ lautet

$$\begin{aligned}(i_x^2 + (n-1)\,x_\nu^2)\,\bar{i}_y^2\,x^4 - (n-2)\,i_x^4\,x^2\,\bar{y}^2 + 2\,(n-2)\,i_x^2\,\bar{i}_y^2\,x_\nu\,x^3 + 2\,(n-2)\,i_x^4\,x_\nu\,x\,\bar{y}^2 \\ + n\,\{3\,i_x^2 + (n+1)\,x^2\}\,i_x^2\,\bar{i}_y^2\,x^2 - (n-2)\,(n\,i_x^2 + (n+1)\,x_\nu^2)\,i_x^4\,\bar{y}^2 \\ + 2\,(n+1)\,(n-2)\,i_x^4\,\bar{i}_y^2\,x_\nu\,x + (n+1)\,\{(2\,n-1)\,i_x^2 + (n+1)\,x_\nu^2\}\,i_x^4\,\bar{i}_y^2 = 0 \quad (62^*).\end{aligned}$$

In der Abbildung ist die Grenzkurve $G_\nu$ für $x_\nu = + \frac{1}{3} i_x$ eingezeichnet. Die Abszisse des Schnittpunktes $T$ der Asymptoten $f(x_\nu) = - \frac{(n-1)(i_x^2 + x_\nu^2)}{i_x^2 + (n-1) x_\nu^2} x_\nu$ ist (vergl. Gl. (67)), da $n = 10$, $f(x_\nu) = - \frac{5}{3} i_x$.

Die zentrale Grenzkurve $G_0$ hat die Gleichung

$$\bar{i}_y^2 x^4 - (n-2) i_x^2 x^2 \bar{y}^2 + 3n\, i_x^2 \bar{i}_y^2 x^2 - n(n-2) i_x^4 \bar{y}^2 + (n+1)(2n-1) i_x^4 \bar{i}_y^2 = 0 \quad (68^*).$$

Die Abschnitte der mittleren Fehlerhyperbel, der Aequivalenzhyperbel und der zentralen Grenzkurve auf der Ordinatenachse (der letztgenannte stimmt überein mit jenem der Aequipräzisionskurve) sind der Reihe nach

$$\pm \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \qquad \pm \sqrt{\frac{n+1}{n-2}}\, \bar{i}_y, \qquad \pm \sqrt{\frac{(n+1)(2n-1)}{n(n-2)}}\, \bar{i}_y \quad . \; . \; . \quad (71^*).$$

Das ist im Fall $n = 10$ wie in der Abbildung

$$\pm 0{,}354\, \bar{i}_y, \qquad \pm 1{,}173\, \bar{i}_y, \qquad \pm 1{,}616\, \bar{i}_y.$$

Die Gleichung der »Aequipräzisionskurve« lautet

$$\bar{y}^2 = \frac{\bar{i}_y^2}{n(n-2)\, i_x^4} \left\{ (n-1) x^4 + (n^2 + 2n - 2) i_x^2 x^2 + (n+1)(2n-1) i_x^4 \right\} \quad (74^*)$$

und die der beiden Parabeln, die ihre asymptotischen Kurven bilden,

$$\bar{Y} = \pm \sqrt{\frac{n-1}{n(n-2)}}\, \bar{i}_y \left\{ \frac{n^2 + 2n - 2}{2(n-1)} + \frac{x^2}{i_x^2} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (75^*).$$

Die Abschnitte dieser beiden Parabeln auf der Ordinatenachse sind für $n = 10$ (Abbildung) $\pm 2{,}199\, \bar{i}_y$.

Auch bei »bedingten Beobachtungen« können analoge Untersuchungen angestellt werden, wie es hier für »direkte« und in dem wichtigsten Fall »vermittelnder« Beobachtungen geschehen ist. Doch gelangt man da schon bei den einfachsten Problemen nicht mehr zu leicht durchblickbaren Ergebnissen. 174

Wien, im April 1922.

# ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

## Neuere Integraphen.

Von **A. GALLE** in Potsdam.

Die Instrumente, welche Integrationen ausführen, zerfallen in zwei Klassen. Beiden gemeinsam ist, daß die zu integrierende Funktion aufgezeichnet vorliegt. Bei den Kurvenmessern, Planimetern, Analysatoren wird das Ergebnis an einer Registriervorrichtung, etwa an einer Skala oder an der Zeigerstellung einer Zählscheibe abgelesen. Sie dienen dazu, bestimmte Integrale zwischen gegebenen Grenzen zu ermitteln. Sollen dagegen unbestimmte Integrationen ausgeführt werden, so muß auch das Resultat graphisch dargestellt werden. Die Instrumente, die dazu dienen, nennt man Integraphen.

Das Prinzip eines Integraphen hat bereits Coriolis 1836 angegeben, Zmurko (1861), J. Thomson und Cayley (1876) haben sich damit beschäftigt, 1878 haben dann Abdank-Abakanowicz und ziemlich gleichzeitig Boys Integraphen konstruiert. Das Instrument von Abdank-Abakanowicz ist aber erst in der Gestalt, die ihm Coradi in Zürich gegeben hat, in allgemeineren Gebrauch gekommen.

Ganz neue Gesichtspunkte hat Professor Ernst Pascal in Neapel für die Konstruktion von Integraphen aufgestellt. Hierbei handelte es sich noch besonders um die Integration von Differentialgleichungen[1]. Es gelang ihm nicht nur, verschiedene Instru-

[1] Außer Lord Kelvin (1876) haben Torris (1895), Petrowitsch (1897) und L. Jacob (1911) Apparate für diesen Zweck konstruiert.

mente zu erfinden, die besondern Problemen angepaßt waren, sondern auch einzelnen Instrumenten Einrichtungen zu geben, die sie zur Lösung ganz verschieden gearteter Aufgaben befähigen. In seinem Buche »I miei Integrafi«[1]) sind sie in systematischer Ordnung beschrieben.

Im folgenden soll die von Pascal getroffene Einteilung in zwei Gruppen beibehalten und demgemäß zwischen cartesischen und Polarintegraphen unterschieden werden, wobei der Apparat von Abdank-Abakanowicz sich den ersteren eingliedert. Im übrigen soll für einen zu vielseitiger Anwendung geeigneten Apparat jeder Gruppe das Prinzip und die Wirkungsweise etwas ausführlicher auseinander gesetzt werden. Für die andern möge ein kurzer Hinweis auf ihre Verwendung genügen.

**1. Cartesische Integraphen.** Die Grundform der cartesischen Integraphen wird von einem rechteckigen Metallrahmen gebildet, der sich auf zwei an seinen kürzeren Seiten angebrachten gleich schweren Rollen und außerdem auf ein scharfrandiges Rädchen stützt, von dem noch die Rede sein wird (Abb. 1). Auf den beiden Rollen kann das Instrument vorwärts und rückwärts mit sich selbst parallel auf der Ebene der Zeichnung hin und her gefahren werden. Ein cartesisches Koordinatensystem orientieren wir so, daß die Fahrtrichtung die Richtung der Abszissenachse ist; um die Vorstellung zu erleichtern, nehmen wir die positive Richtung nach rechts an. Die Längsseiten des Rechtecks bleiben der Ordinatenachse parallel, die nach hinten positiv sei. Die langen Seiten dienen zugleich als Schienen für zwei kleine Wagen, den Differentialwagen auf der rechten und den Integralwagen auf der linken Schiene. Mit dem ersteren ist ein Stift in fester Verbindung, der mit Hilfe eines am Differentialwagen angebrachten Griffes auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Am Integralwagen ist das genannte Rädchen befestigt, das nur in der nach Belieben veränderbaren Richtung seiner vertikalen Ebene auf der Unterlage rollen kann. Neben diesem Rädchen befindet sich, in starrer Verbindung mit ihm, eine Schreibfeder, welche die Integralkurve aufzeichnet.


Abb. 1

Die beiden Wagen stehen bei dem zunächst betrachteten Apparate durch eine geradlinige Stange in Zusammenhang, die ich Lineal[2]) nennen will. Dieses Lineal ist an einem Zapfen des Integralwagens drehbar befestigt, während es einen am Integralwagen befindlichen Zapfen in einer Nute oder einem Schlitz umfaßt, so daß dieser sich in der Richtung des Lineals in ihm verschieben kann. Das Rädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene stets in der Richtung desselben steht.

Die erste Aufgabe, die mit dem Apparate ausgeführt wird, besteht in der Aufzeichnung der Koordinatenachsen. Man klemmt mit einer Schraube den Differentialwagen auf seiner Schiene fest, drückt den Stift auf das Papier, wo er einen Punkt kenntlich macht. Dann läßt man das Instrument auf seinen Rollen laufen und bringt den Auflagepunkt des Rädchens (oder auch die Schreibfeder) genau auf diesen Punkt, wozu der Integralwagen auf seiner Schiene verschoben werden muß. Indem man nun das Instrument rollen und die Schreibfeder herab läßt, zeichnet sie die $x$-Achse. Noch einfacher kann man beide Wagen an das vordere Ende der Schienen bringen und dann das Instrument rollen lassen, dann wird die Schreibfeder die Abszissenachse am vorderen Rande des Zeichenblattes zeichnen.

Um die Ordinatenachse zu erhalten, ist nur erforderlich, eine der Rollen des Instrumentes festzuklemmen. Das Rädchen wird ein wenig in die Höhe gehoben und der Integralwagen auf seiner Schiene bewegt, so beschreibt die Zeichenfeder die $y$-Achse.

[1]) Neapel 1914. Eine deutsche Uebersetzung von A. Galle erschien in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1922, S. 232 bis 243, 253 bis 277, 300 bis 311, 326 bis 337.

[2]) Meist Directrix genannt.

Verfolgt man mit dem Stift eine gegebene Kurve, die Differentialkurve, so kann man sich die Bewegung aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken. In der Richtung der $x$-Achse wird das ganze Instrument gerollt, die Bewegung in der Ordinatenrichtung wird durch Verschiebung des Differentialwagens auf seiner Schiene hervorgebracht. Betrachten wir die letztere zuerst, so hat sie zur Folge, daß das Lineal und damit die Ebene des Rädchens um den Zapfen des Integralwagens gedreht wird. Wenn dagegen das ganze Instrument gefahren wird, so wird das Rädchen danach streben, seine Rollrichtung mit der Richtung, in der es gezogen wird, in Uebereinstimmung zu bringen und hierbei einen Zug auf den Integralwagen ausüben, der dadurch auf seiner Schiene bewegt wird. Das Rädchen bewegt sich dabei stets in der Tangentenrichtung der Kurve, die sein Auflagepunkt beschreibt.

In der praktischen Ausführung wird diese Kurve nicht von dem Rädchen, sondern von der Schreibfeder aufgezeichnet, was aber nur die Verschiebung der Kurve um eine konstante Länge in der Abszissenrichtung zur Folge hat. Ebenso wird die gegebene Kurve nicht vom Zapfen des Differentialwagens, sondern von dem Stift durchfahren, was ebenfalls eine konstante Verschiebung dieser Kurve im Sinne der $x$-Koordinaten zur Folge hat. Die Abszissendifferenz der Zapfen der beiden Wagen ist eine Instrumentalkonstante, die auch als Maßeinheit ($a$) des Instrumentes bezeichnet wird, im Gegensatz zur Maßeinheit der Zeichnung. Von ihr unterscheidet sich die Projektion des Abstandes von Stift und Feder auf die $x$-Achse nur durch eine Konstante.

**2. Theorie der cartesischen Integraphen.** Die Gleichungen der Kurven schreiben wir in der Form $y = f(x)$. Für die gegebene Differentialkurve sei diese Funktion $Q(x)$, während die Ordinate der Integralkurve $y$ sein möge. Ist $H$ das Zentrum des Integralwagens (Zapfen des Rädchens), $G$ der Zapfen des Differentialwagens, so möge das Lineal $GH$ und ebenso die Ebene des Rädchens den Winkel $\varphi$ mit der $x$-Achse einschließen. Dann ist $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ und $Q(x) - y = a \operatorname{tg}\varphi = y'$ und $y' + y = Q(x)$ ist die kanonische Form einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die also von dem Apparat integriert wird.

Ist für zwei entsprechende Punkte beider Kurven die Ordinate dieselbe: $Q(x) = y$, so ist $y' = \operatorname{tg}\varphi = 0$, also die Tangente der Integralkurve der $x$-Achse parallel und ihre Ordinate hat einen größten oder kleinsten Wert. Ist auch $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, so hat die Integralkurve (im allgemeinen) einen Wendepunkt. Dies tritt dann ein, wenn $y' = \operatorname{tg}\varphi$ = konstans ist. Das ist aber der Fall, wenn sich der Stift in der Richtung $GH$ bewegt, d. h. wenn die Tangente der Differentialkurve ebenfalls unter dem Winkel $\varphi$ gegen die $x$-Achse geneigt ist. Wenn also die Tangenten an entsprechenden Stellen parallel sind, so hat die Integralkurve einen Wendepunkt.

Verfolgt man mit dem Stift die Kurve $Q(x)$ bis zu einem gewissen Punkte und gibt dann dem Differentialwagen einen Ruck, damit er sich bei festgestelltem Instrument auf seiner Schiene bewegt, so ändert sich die Tangente der Integralkurve sprungweise. Wenn also die Ordinate der Differentialkurve unstetig wird, so wird die Tangente der Integralkurve unstetig. Wenn dagegen die Tangente der Differentialkurve unstetig wird, während ihre Ordinate stetig bleibt, so bleibt die Tangente der Integralkurve stetig. Wenn man daher dem ganzen Instrument eine plötzliche Rückwärtsbewegung erteilt, so entsteht eine Spitze der Integralkurve, da bei unveränderter Stellung des Differentialwagens die Tangente unverändert bleibt, also bei der Rückwärtsbewegung nur in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird.

Zu einer gegebenen Differentialkurve gehören unendlich viele Integralkurven, die dadurch entstehen, daß dem Integralwagen beliebige Anfangsstellungen auf seiner Leitschiene zugewiesen werden. Die lineare Differentialgleichung $a y' + y = Q(x)$ hat das allgemeine Integral $y = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[ \int Q e^{\frac{x}{a}} dx + C \right]$. Dieser Ausdruck wird also durch die Integralkurve des Apparats dargestellt. Bringt man die Schreibfeder auf einen Anfangspunkt mit der Ordinate $y_0$ und der Abszisse $x_0$, so wird $C = a y_0 e^{\frac{x_0}{a}}$ und für $x_0 = 0$ und $a = 1$ wird die Integrationskonstante $C = y_0$.

Die aufgezeichnete Kurve macht verschiedene Eigenschaften des Integrals anschaulich. Wenn zwei Integralkurven beschrieben werden, so nähern sie sich nach der Seite

der wachsenden $x$ einander asymptotisch entsprechend der Ordinatendifferenz $\frac{C_1 - C_2}{a} e^{-\frac{x}{a}}$. Sind drei oder mehr partikuläre Integrale $y_1$, $y_2$, $y_3$ ... aufgezeichnet, so zeigt sich, daß die Sehnen der Bogen aller dieser Kurven, die von zwei beliebig gewählten Senkrechten auf der $x$-Achse begrenzt werden, sich verlängert in einem Punkte schneiden, der Beziehung $\frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} =$ konst. entsprechend, welche aussagt, daß das Verhältnis der Ordinatendifferenzen von $x$ unabhängig ist.

Auch einige lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + y = Q(x)$ können mit dem Apparate integriert werden, insbesondere wenn die $a$ numerische Koeffizienten der algebraischen Gleichung $\xi^n - a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} \ldots + (-1)^n a_n = 0$ mit reellen Wurzeln sind[1]. Hierzu ist eine Vorkehrung nötig, den Abstand der Schienen zu verändern, d. h. der Instrumentalkonstanten verschiedene Werte geben zu können. Bei dem betreffenden Instrument kann $a$ von 7 bis 16 cm geändert werden. Es ersetzt dann gewissermaßen mehrere Instrumente mit verschiedenen Maßeinheiten.

Eine andre Erweiterung der Anwendbarkeit wird dadurch erreicht, daß die Ebene des Rädchens auch unter von null verschiedenen Winkeln gegen das Lineal mit Hilfe eines geteilten Kreises gestellt werden kann (Abb. 2). Bezeichnet man diesen Winkel mit $\alpha = \operatorname{arctg} m$, so heißt die Differentialgleichung, da $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi}$ ist,
$$y' = \frac{-a m + Q(x) - y}{a + m[Q(x) - y]}.$$

Von dieser Integration kann man zu einem besonderen Zwecke Gebrauch machen. Stellt man das Rädchen senkrecht zum Lineal, ist also $\alpha = 90^0$ und $m = \infty$, so wird $y = \frac{a}{y'}$. Diese Gleichung integriert man, indem der Differentialwagen auf seiner Schiene festgestellt und das ganze Instrument (in diesem Falle vorteilhafter nach links) gerollt wird. Man erhält einen Parabelbogen $y^2 = 2\,ax$, dessen Achse parallel zur $x$-Achse liegt. Den Scheitel dieser Parabel kann allerdings die Feder nicht erreichen, weil das Rädchen sich senkrecht zur $x$-Achse zu stellen strebt und daher schließlich eine weitere Bewegung unmöglich macht.

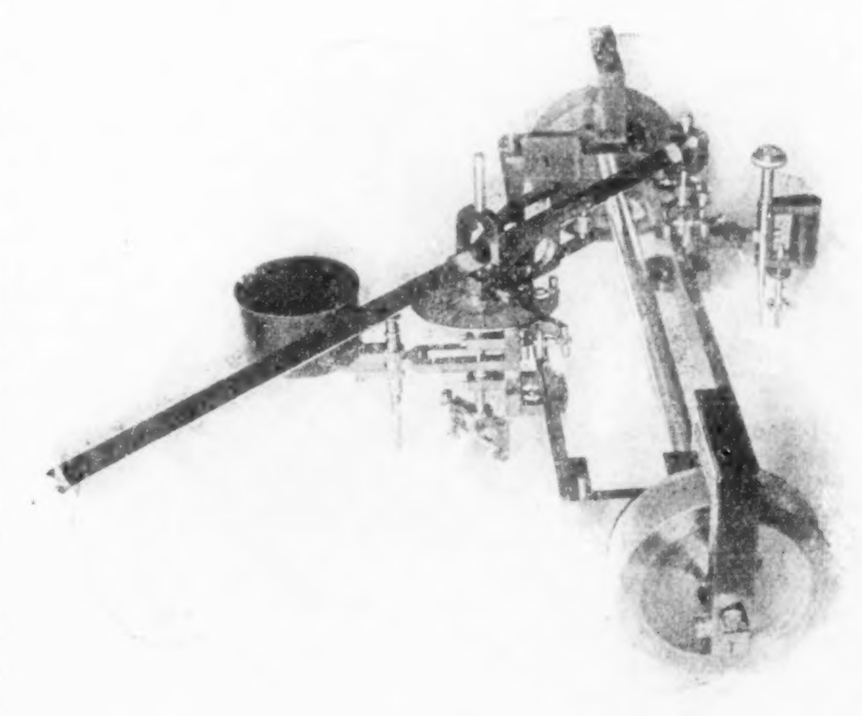


Abb. 2

Mit demselben Instrument kann man die Exponentialkurve, die Kettenlinie, die hyperbolische Kosinuskurve und die Wahrscheinlichkeitskurve zeichnen.

Zum Schluß wollen wir auf die Auflösung der algebraischen Gleichungen hinweisen, die das Instrument leistet. Wenn man $Q = e^{-x}$ setzt, eine Gleichung, die man, wie erwähnt, mit dem Instrument zeichnen kann, so erhält man $y = (x + C)e^{-x}$. Wird diese Kurve wieder integriert, so folgt $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + Cx + C^1\right)e^{-x}$ usw.

Ist also z. B. die Gleichung $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx + r = 0$ vorgelegt, deren Ableitungen der Reihe nach $\frac{1}{2}x^2 + px + q$ und $x + p$ sind, so integriert man zunächst

[1]) Ein Beispiel ist $980\,y''' + 208\,y'' + 31\,y' + y = Q(x)$, wo $\xi^3 - 31\,\xi^2 + 208\,\xi - 980$ die 3 reellen Wurzeln 14, 10, 7 hat. Die algebraische Gleichung hat eine Aehnlichkeit mit der »charakteristischen Gleichung«.

$y = e^{-x}$, indem der Stift im Anfang auf den Punkt mit der Ordinate 1 und der Abszisse 0 gestellt wird. Dann integriert man wiederum, indem man als Anfangsbedingung einführt, daß dem Punkte mit der Ordinate $p$ der Punkt mit der Ordinate $q$ entspricht, endlich die dann erhaltene Kurve so, daß dem Punkte mit der Ordinate $q$ der Punkt der Integralkurve mit der Ordinate $r$ entspricht. Die Schnittpunkte der letzten Kurve mit der $x$-Achse liefern die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

**3. Die Pascalschen Konstruktionen.** Beim Integraphen von Abdank-Abakanowicz ist in der Mitte des Instruments ein fester Zapfen vorhanden, um den sich das Lineal dreht. Auf letzterem läuft nun ein dritter Wagen, der dazu dient, mit Hilfe eines Gelenkparallelogramms die Ebene des Rädchens immer parallel dem Lineal zu halten. Auch hier bringt Pascal die Aenderung an, daß das Rädchen unter einem beliebigen konstanten Winkel gegen die Linealschiene gehalten werden kann, wodurch der Aufgabenkreis erweitert wird, dem dieser Apparat dient. Bei der Einstellung des Rädchens senkrecht zur Schiene ($\alpha = 90^0$) findet man den Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{\lg x}$, der die Anzahl der Primzahlen zwischen 2 und $x$ mit großer Annäherung darstellt.

Ein andres Instrument hat zwei feste Zapfen; mit ihm kann die Riccatische Gleichung integriert werden. Auf einer Schiene, die den einen festen Zapfen $O$ mit dem Differentialwagen $G$ verbindet, läuft auch hier ein dritter Wagen $S$, durch den zwei Stangen vom andern Zapfen $E$ und vom Integralwagen $H$ aus geführt sind. Dadurch wird erreicht, daß die Verbindung des Differential- und Integralwagens immer parallel des Stange $ES$ bleibt, wodurch die gegenseitige Lage der beiden Wagen geregelt wird.

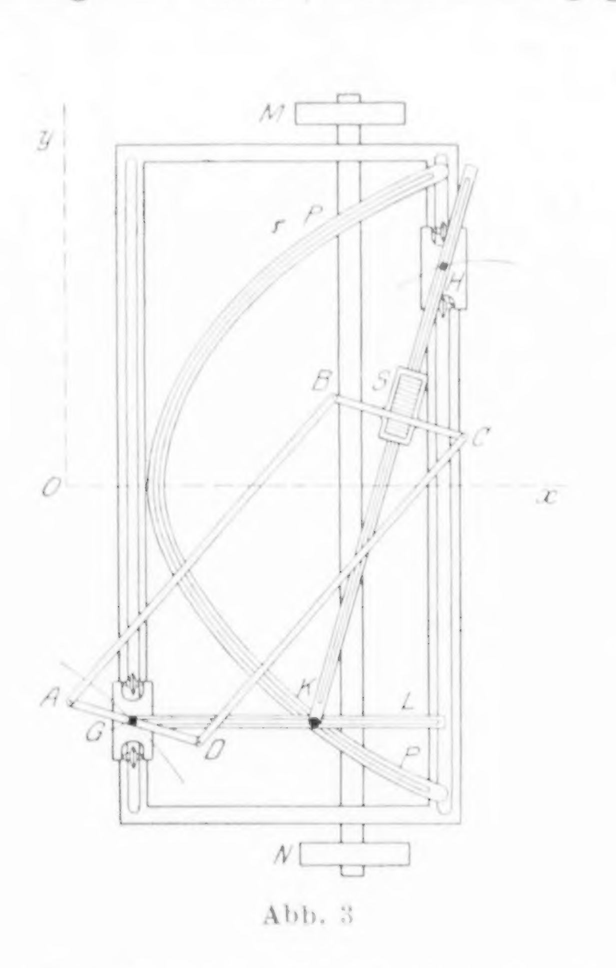


Abb. 3

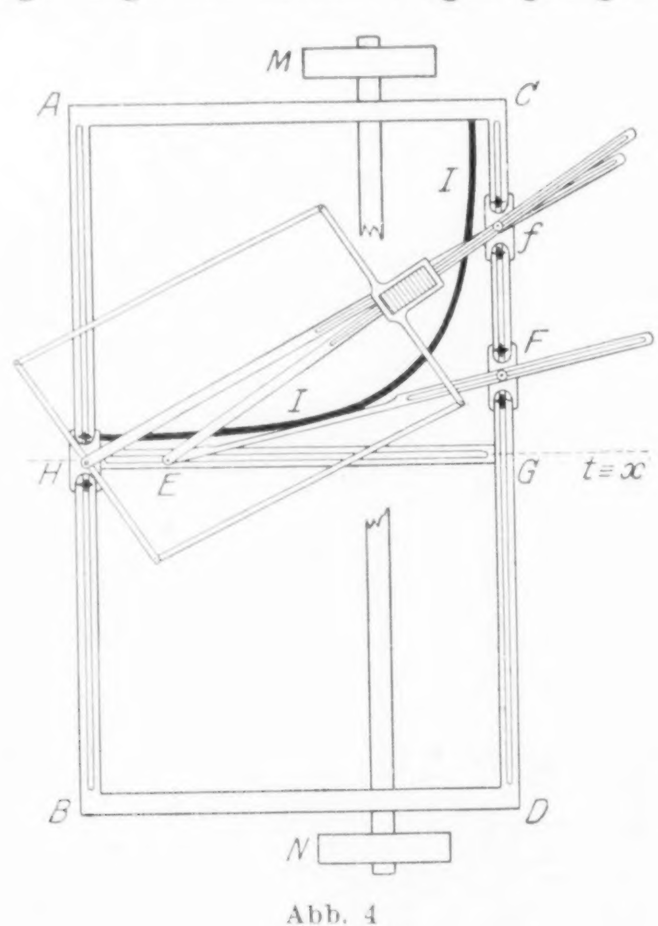


Abb. 4

Von besonderer Bedeutung ist dann noch ein Instrument (Abb. 3), bei dem ein beweglicher Zapfen $K$ (statt des festen bei Abdank) angebracht ist, um den sich das Lineal dreht. Entweder wird der Zapfen durch den Differential- oder durch den Integralwagen bewegt. Hängt die Bewegung von letzterem ab, so gelingt es, damit die natürliche Differentialgleichung der Geschoßbewegung zu integrieren[1]), d. h. die differentielle Beziehung zwischen Neigungswinkel und Geschwindigkeit in der Geschoßbahn. Diese Aufgabe kann man theoretisch nur für gewisse Fälle des Gesetzes der Abhängigkeit vom Luftwiderstande lösen, dieses Instrument löst sie für ein beliebiges Gesetz, wenn dieses graphisch dargestellt wird. Hängt aber die Bewegung des Zapfens vom Differentialwagen ab, so ist ein solches Instrument (Abb. 4) imstande, Integralgleichungen (Volterra) zu lösen. Um

[1]) L. Jacob beschäftigte sich auch mit dieser Aufgabe, der von ihm erdachte Apparat ist aber komplizierter. — In Abb. 3 sind $G$ und $H$ vertauscht.

die lineare Differentialgleichung mit allgemeinen Koeffizienten $y' = F(x)y + \psi(x)$ zu integrieren, ist noch ein Gelenkparallelogramm erforderlich, durch welches die Schiene $Hf$ (Abb. 5) der von der Mitte $K$ der Seite $AB$ ausgehenden Stange $K\varphi$ parallel gehalten wird.

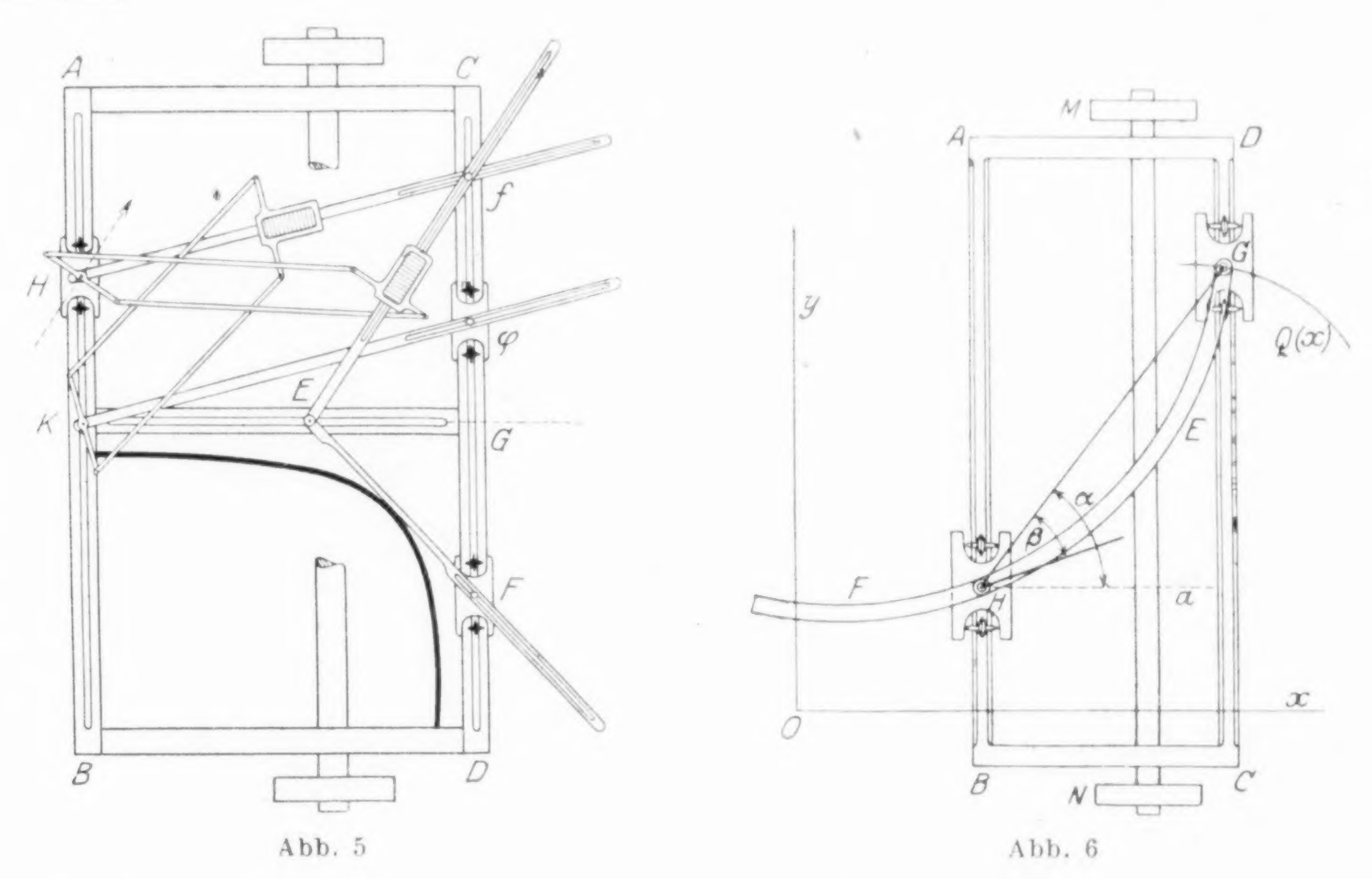



Abb. 5 Abb. 6

Die Integration der Riccatischen und ebenso der Abelschen Gleichung wird aber auch durch ein Instrument (Abb. 6) geleistet, bei dem an Stelle des geraden Lineals, das die beiden Wagen verbindet, ein Kurvenlineal eingesetzt ist. Bei dieser Art von Instrumenten sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder ist das gekrümmte Lineal am Differential- oder am Integralwagen drehbar befestigt, während der andre Wagen mit seinem Zapfen in einem Schlitz des Lineals sich verschiebt. Die Ebene des Integrierrädchens muß sich im ersteren Falle immer in die Richtung der Tangente der Linealkurve stellen. Die Form der Differentialgleichung, die integriert wird, ist $y' = \Phi(Q(x) - y)$ und man kann für eine gegebene Funktion $\Phi$ die Gestalt der Kurve bestimmen, die das Lineal haben muß.

Die zweite Anordnung verlegt den Drehpunkt des Lineals in den Zapfen des Integralwagens (Abb. 7). Das Integrierrädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene in die Richtung der Kurventangente fällt. Die Form des Kurvenlineals, das wieder über den Zapfen des andern, hier des Differentialwagens, verschiebbar ist, ist bei diesem Instrument eine andre. Die Kurve ist sozusagen die längere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Drehpunkt die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks ist. Diese Ausführung ist in mancher Beziehung, namentlich auch in bezug auf die Herstellung der Kurve sehr vorteilhaft, hat aber den Nachteil, daß die Beweglichkeit bei gewissen Wagenstellungen versagt, und nur mittels eines besondern Handgriffs gelingt es, den nötigen Antrieb hervorzubringen.

Noch zwei andre Formen hat Pascal seinen Apparaten gegeben. Bei der einen läßt er die eine Schiene, nämlich die, auf der der Differentialwagen gleitet, ganz fort. Das Instrument (Abb. 8) hat dann eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Schneidenplanimeter, aber nur insofern, als der Stift, der am Ende des Lineals oder der Stange sitzt, die gegebene Kurve entlang geführt wird. Aber an Stelle der Schneide tritt hier der Integralwagen auf seiner Schiene und sein Rädchen.

Endlich hat Prof. Pascal noch Integraphen ausgedacht, bei denen die Schiene, auf welcher der Integralwagen läuft, nicht geradlinig ist, sondern in einer bestimmten Kurvenform gebogen (Abb. 9). Dann können noch bei diesem neuen Typus wieder alle andern Verschiedenheiten eingeführt werden, die bei dem Instrument mit geraden Schienen erwähnt wurden. Auch mit diesem Apparate läßt sich die Differentialgleichung der Geschoßbewegung im widerstehenden Mittel integrieren, aber es muß hier für jedes Widerstands-

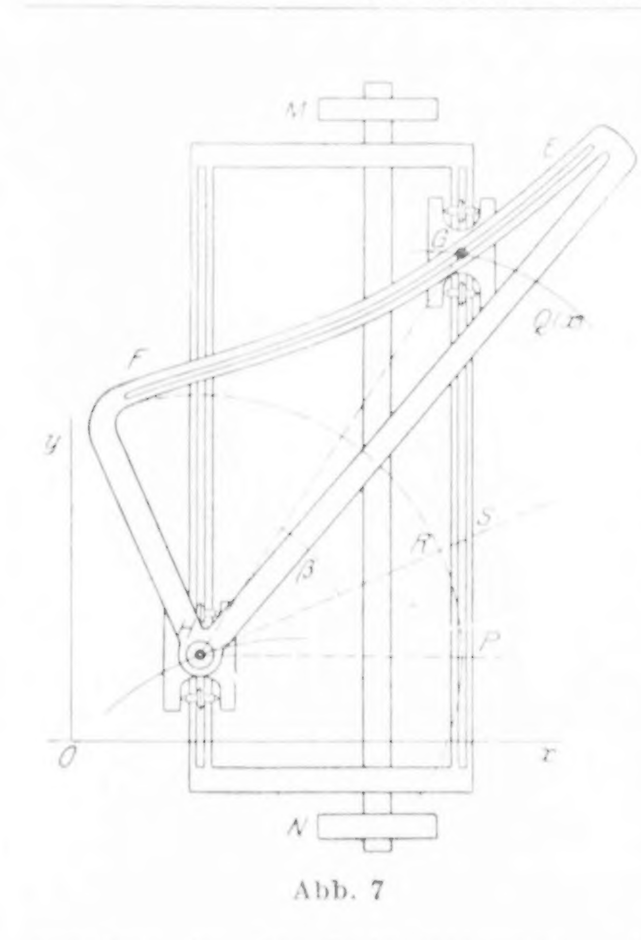



Abb. 7

gesetz eine anders geformte Schiene angefertigt werden, während in dem früheren Falle es nur nötig war, eine andere Kurve zu zeichnen.

**4. Polarintegraphen.** Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen cartesischen Inte-

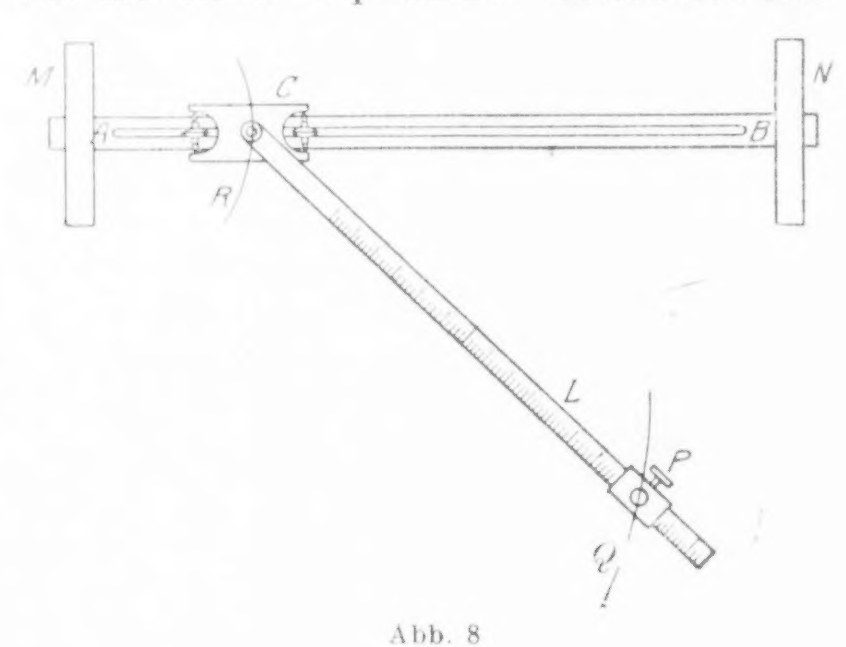



Abb. 8

graphen ist der Polarintegraph. Auf seine Erfindung hat wohl Prof. Pascal besondern Wert gelegt, und eine Abbildung desselben schmückt das Titelblatt seines Buches.

Das Instrument (Abb. 10) hat die Gestalt eines Kreissektors mit einem festen und einem drehbaren Schenkel, deren Winkelstellung an einem geteilten Quadranten abgelesen und durch eine Klemmschraube fixiert wird. Beide Schenkel dienen als Schienen, der erste für den Differentialwagen, der drehbare für den Integralwagen, die im einfachsten Falle durch eine gerade Stange verbunden sind. Die drei Stützpunkte des Instruments werden durch den Zapfen $O$ im Kreiszentrum, durch eine Walze, deren Achse mit dem Ende des festen Schenkels zusammenfällt, und durch den Rand des mit dem Integralwagen verbundenen Rädchens gebildet. Das Lineal, die Verbindungsstange der Wagen, ist um den Zapfen des Integralwagens drehbar und verschiebt sich über den Zapfen des Differentialwagens. Die Ebene des Rädchens bildet einen konstanten, aber verstellbaren Winkel mit dem Lineal.

Die Wirkungsweise des Apparates übersieht man wieder am besten, wenn man ihn zunächst einfache Operationen ausführen läßt. Klemmt man die Walze fest und hebt den Stift des Differentialwagens und das Rädchen des Integralwagens etwas an, so daß

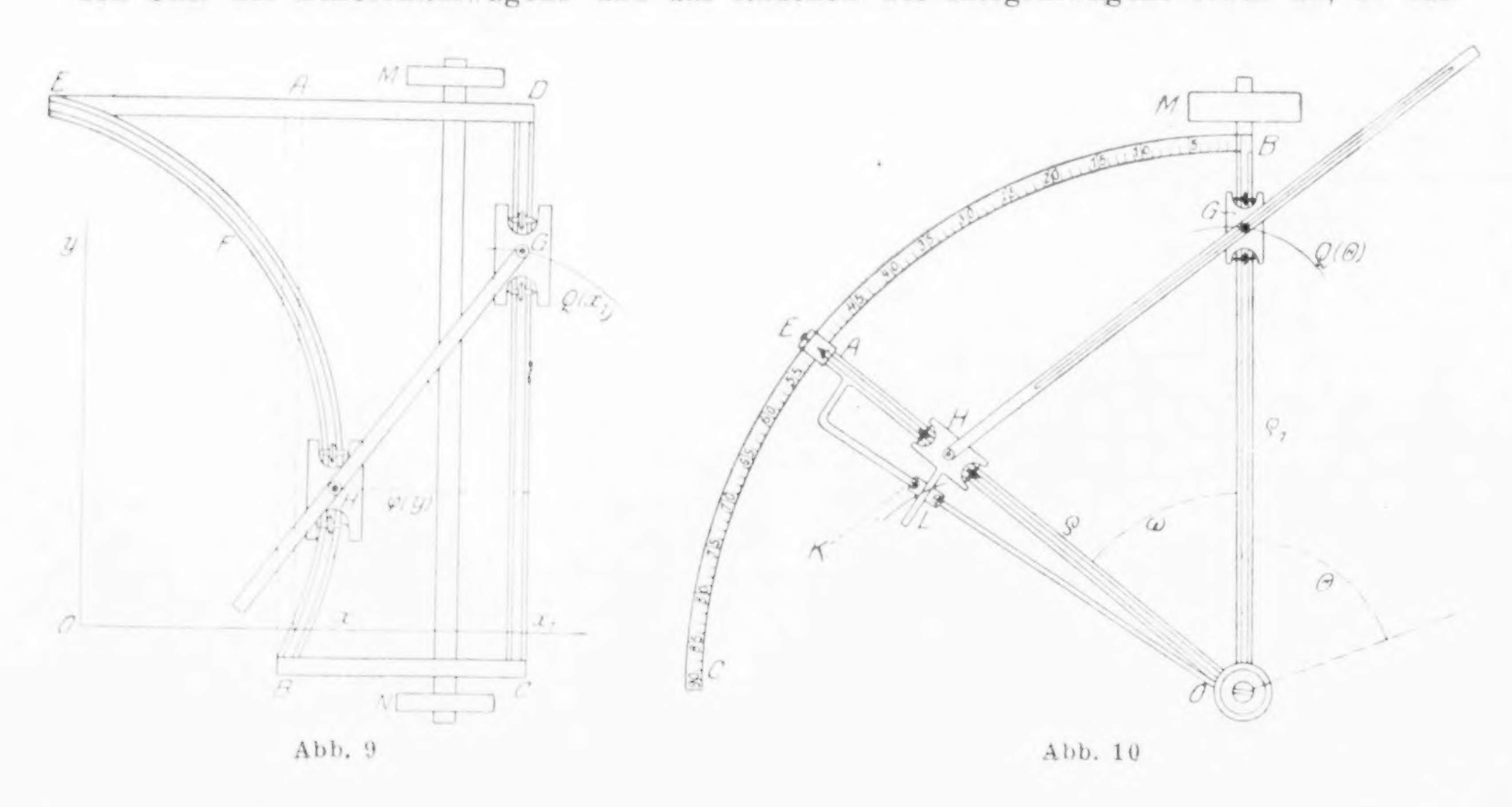



Abb. 9 Abb. 10

sie die Ebene der Zeichnung nicht berühren, so zieht die Schreibfeder, wenn man den Integralwagen rollen läßt, eine durch das Zentrum gehende Gerade. Stellt man den drehbaren Schenkel unter verschiedenen Winkeln gegen den festen, so erhält man auf diese Weise in $O$ konvergierende Gerade. Die Winkel, die sie untereinander bilden, kann man an der Quadrantenteilung ablesen.

Stellt man dagegen den Integralwagen auf seiner Schiene fest und läßt das ganze Instrument auf der Walze um das Zentrum rollen, so beschreibt die Ziehfeder einen Kreis um das Zentrum. Durch Veränderung der Stellung des Wagens auf seiner mit einer Teilung versehenen Schiene bekommt man konzentrische Kreise, deren Halbmesserlängen auf der Schiene des Integralwagens abgelesen werden können.

Da sich die Wagen nicht bis zum Zentrum verschieben lassen, kann man das Lineal vom Differentialwagen abheben und über das Zentrum legen. Stellt man dann das Rädchen normal zum Lineal ($\alpha = 90^0$), so wird bei der Drehung des Apparates die Schreibfeder einen Kreis um den Mittelpunkt beschreiben. Wenn man aber $\alpha = 75^0$, $60^0$ usw. macht, so erhält man logarithmische Spiralen, da in diesem Falle das Rädchen einen Zug auf den Integralwagen ausübt.

Während das Rädchen sich unter dem Integralwagen befindet, ist die Schreibfeder seitlich gegen ihn verrückt, in der Weise, daß beide den gleichen Abstand vom Zentrum haben, aber ihre beiden Radien einen konstanten Winkel, bei **Pascal** von $15^0$, miteinander einschließen. Dadurch wird die Integralkurve, ohne ihre Gestalt zu ändern, um das Zentrum gedreht.

Stellt man den Stift des Differentialwagens auf einen Punkt der Zeichenebene ein und klemmt man ihn fest, dreht dann das ganze Instrument um $15^0$ rückwärts, so kann man nach diesem Punkte konvergierende Gerade, Kreise um ihn als Mittelpunkt, Spiralen usw. ziehen, indem man bei feststehendem Apparate den beweglichen Schenkel, der den Integralwagen trägt, nach Lösung der Schraube längs des Quadranten gleiten läßt und das Rädchen auf Stellungen von $\alpha = 0^0$, $90^0$ usw. gegen das Lineal bringt.

Man kann leicht Tangenten oder Normalen an eine Kurve mit dem Apparat zeichnen. Hat die Schreibfeder eine Kurve bis zu einem gewissen Punkte gezogen, so hält man die Bewegung des Instrumentes an, löst die Schraube, mit der die Schiene des Integralwagens am Quadranten geklemmt ist und dreht die Schiene um den Mittelpunkt. Ist $\alpha = 0$, d. h. das Rädchen in der Richtung des Lineals, so beschreibt die Feder die Tangente; ist $\alpha = 90^0$, so zeichnet sie die Normale an die Kurve in dem betreffenden Punkte. Man kann auf diese Weise auch eine beliebig gegen die Tangente geneigte Gerade ziehen, wenn man das Rädchen unter einem andern Winkel gegen das Lineal einstellt.

**5. Theorie der Polarintegraphen.** Eine gegebene Kurve beziehen wir bei diesem Apparate auf Polarkoordinaten und stellen sie in der Form $\varrho_1 = Q(\theta)$ vor. Als Pol gilt das Zentrum $O$, und von einer beliebig gewählten Richtung durch $O$ wird der Polarwinkel $\theta$ gezählt. Ist der Winkel des Sektors, der am Quadranten abgelesen wird, $\omega$, so bildet die Schiene des Integralwagens mit ihr den Winkel $\theta + \omega$.

Ist $\alpha = 0^0$, also die Rollrichtung des Rädchens mit der Linealrichtung zusammenfallend, so ist der Winkel $\varphi$ der Tangente der Integralkurve (von der Normale auf dem Radius Vektor im positiven Sinne gezählt) durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\varrho}{\varrho\, d(\theta + \omega)} = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\theta}$ gegeben. Da andererseits $\cos \varphi = \frac{\varrho_1 \sin \omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos \omega}}$ ist, so wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho - \varrho_1 \cos \omega}{\varrho_1 \sin \omega}$, und die durch den Apparat integrierte Differentialgleichung lautet $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2}{\sin \omega\, Q(\theta)} - \varrho \operatorname{ctg} \omega$, worin $Q$ eine willkürliche Funktion und $\omega$ eine Konstante ist. Ist $\alpha$ von 0 verschieden, so erhält man statt dessen ($\operatorname{tg} \alpha = m$ gesetzt)

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2 + \varrho\, Q(\theta)\,(m \sin \omega - \cos \omega)}{Q(\theta)\,(m \cos \omega + \sin \omega) - m\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho^2 + m\varrho\varrho'}{\varrho'\,(m \cos \omega + \sin \omega) - \varrho\,(m \sin \omega - \cos \omega)} = Q(\theta).$$

Für $\alpha = 0^0$ erhält man natürlich die vorige Gleichung, für $\alpha = 90^0$ erhält man $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\sin \omega \cdot Q(\theta) \cdot \varrho}{\cos \omega \cdot Q(\theta) - \varrho}$. Endlich leistet der Apparat die polare Quadratur, indem man aus der ersten und letzten Gleichung für $\omega = 90^0$ die Gleichungen bekommt: $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{Q(\theta)}$

und $\frac{d\varrho}{d\theta} = -Q(\theta)$. Ferner kann der Apparat lineare Differentialgleichungen, Bernoullische und kompliziertere Differentialgleichungen integrieren.

Von andern Anwendungen sei, abgesehen von Kurvenzeichnungen, die z. T. schon erwähnt wurden, auf die graphische Konstruktion der Zahl $\pi$, die der Integraph von Abdank-Abakanowicz umständlicher zustande bringt, und auf die Winkelteilung hingewiesen. Ferner stellt der Apparat die Kurven für die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung her und kann zur Berechnung der besonders in der Ballistik auftretenden Integrale $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ verwendet werden.

Für die Auflösung algebraischer Gleichungen kann nicht die Gleichung $\varrho = f(\theta)$ ohne weiteres zugrunde gelegt werden, weil der Integralwagen sich nicht dem Zentrum über einen gewissen Abstand nähern kann. Man muß daher zwei Kurven zeichnen $\varrho = f(\theta) + \varphi(\theta)$ und $\varrho = \varphi(\theta)$, und die Aufgabe läuft dann darauf hinaus, die Werte von $\theta$ zu bestimmen, für die $f(\theta) = 0$ wird. Dazu können dann zwei verschiedene Verfahren verwendet werden, die indessen etwas umständlicher erscheinen als die mit den cartesischen Integraphen ausgeführten.

Ich bin im vorstehenden nur auf die Instrumente von Pascal eingegangen, einmal weil man sich über andre Apparate dieser Art durch das Werk von L. Jacob, le calcul mécanique (Paris 1911) und den von mir herausgegebenen Band 15 »Mathematische Instrumente« der Sammlung Jahnke (Berlin 1912) orientieren kann, dann aber auch, weil diese andern Konstruktionen meist wesentlich komplizierter sind und nicht so vielseitige Anwendungen zulassen. Als einen recht einfachen Apparat möchte ich nur noch den von L. Jacob zur Lösung der Riccatischen Differentialgleichung erwähnen, der einem Prytzschen Stangenplanimeter nachgebildet ist. An Stelle der Schneide tritt hier ein scharfrandiges Rädchen. Die Stange ist durch den Mittelpunkt eines geteilten Kreises hindurchgeführt; ein Durchmesser dieses horizontalen Kreises wird durch zwei miteinander verbundene Gelenkparallelogramme stets einer bestimmten gegebenen Richtung parallel gehalten, wenn der Fahrstift auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Der ganze Mechanismus wird von kleinen Rollen getragen, damit der Kreis und die Parallelogramme sich mit möglichst wenig Reibung bewegen können. An der Stange ist ein Nonius angebracht, der an dem Kreise gleitet und den Winkel, den die Stange in irgend einem Augenblick mit der Anfangsrichtung einschließt, abzulesen gestattet. Die Richtung der Stange ist jederzeit Tangente der vom Berührungspunkte des Schneidenrades beschriebenen Kurve. Allerdings ist dieser Apparat kein eigentlicher Integraph, da er die Integrationskurve nicht aufzeichnet, sondern Ablesuugen erfordert, indessen scheint es mir nicht schwierig, ihn noch mit einer Schreibfeder auszustatten. Zunächst liefert der Apparat die Integration der Riccatischen Gleichung $\frac{du}{dt} = Pu^2 + Qu + R$ nur in dem besonderen Fall, daß $P + R = 0$ ist. Aber Jacob führt in geschickter Weise den allgemeinen Fall auf den besonderen zurück. Für die Abelsche Gleichung $\frac{du}{dt} = pu^3 + qu^2 + ru + s$ hat er ein andres Instrument konstruiert, das dem Prinzipe nach dem vorigen ähnlich ist, aber an Stelle der Parallelführung tritt die Führung der Kurvenschiene in einer durch die Koeffizienten der Gleichung vorgeschriebenen Weise. Der Vergleich mit der von Pascal und Ajello angegebenen Integration durch den Apparat mit gekrümmtem Lineal dürfte aber zugunsten des letzteren ausfallen, zumal dabei beide Gleichungen, wenn auch durch verschieden geformte Lineale, integriert werden.

Der Nutzen, den die Anwendung von Instrumenten, wie die Integraphen, stiften kann, wird besonders bei häufiger Wiederholung derselben Operation hervortreten und sich vornehmlich in Zeitersparnis zeigen. Es wurde ferner bereits darauf hingewiesen, daß die graphische Darstellung manche Eigenschaften des Resultats ungesucht und deutlicher zeigt, als die rechnerische Behandlung einer Aufgabe. Endlich bieten Instrumente dieser Art auch ein hohes wissenschaftliches Interesse, worauf Henry S. H. Shaw in seinem kleinen Werke »Mechanical Integrators« (New York 1886) hinweist, indem er sagt: Aside from the labor-saving quality which most of them possess, they have a value arising from the fact that they represent thoughts of more or less complexity expressed in mechanism. 227

Potsdam, Oktober 1922.

# KURZE AUSZÜGE

## Festigkeitslehre.

**Ueber die Festigkeit von angeschweißten Deckeln** hat R. J. Roarck (Mech. Engineering, New-York, 44. S. 225—230, 1922) Versuche angestellt. Er setzte röhrenförmige Gefäße von 400 mm Durchmesser, 3 m Länge und 9,5 mm Wandstärke unter Druck. Den Verschluß der Röhren bildeten gewölbte Deckel. Die Krempe der Böden war auf ihrer Stirnseite, wo sie verstemmt zu werden pflegt, elektrisch an den Mantel angeschweißt. Einige Deckel waren angenietet. Von den untersuchten Gefäßen waren zwei Eisenbetonröhren mit drei Armaturen. Als Folge der übermäßigen Beanspruchung der Gefäße durch den Druck sprangen bei zwei Behältern die Deckel wegen der Ueberschreitung der Biegungsfestigkeit in dem abgebogenen Rand ab, in fünf Fällen riß die geschweißte Längsnaht der Rohre auf, in zwei Fällen mußten die Versuche wegen der Undichtigkeit unterbrochen werden. Die Risse begannen in den Längsnähten dort, wo Flanschen auf dem Mantel befestigt waren. Die Verschärfung der Beanspruchung des Zylindermantels durch die Biegung an seinen Enden, die von der gehinderten Querausdehnung wegen der angenieteten oder angeschweißten Deckel herrührt, deutet der Verfasser an, ohne auf ihre genauere Abschätzung einzugehen. Die schwächsten Stellen waren entweder die Längsnaht oder die Stellen der stärksten Umbiegung in den gewölbten Deckeln, während die Schweißstellen zwischen Mantel und Boden bis zu den angewandten Drucken standhielten.

**Für die Biegungsbeanspruchung ebener Deckel** gibt G. D. Fish (Mech. Engineering, New-York, 44. S. 165—170, 1922) Formeln an, die er zur Berechnung der Köpfe großer Gasmaschinenzylinder verwendet. Er bestimmt die Durchbiegungen und die Spannungen einer freiaufliegenden kreisförmigen Platte, die unter einer ringförmig verteilten Last verbogen wird. Aus diesem Belastungsfall können alle Sonderfälle abgeleitet werden, die eine Bedeutung für die Beanspruchung der Zylinderdeckel haben. Da er sich auf die Platten konstanter Stärke beschränkt, sind seine Formeln mit den schon von Clebsch und Grashof angegebenen identisch.

**Die Elastizitätskonstanten von Holz** hat H. Carrington (Phil. Mag. 43. S. 871—878, 1922) in weiteren Versuchen bestimmt[1]). Die Probekörper wurden aus den Holzstämmen mit verschiedener Orientierung ihrer Hauptträgheitsachsen zu den ausgezeichneten Wachstumsrichtungen des Holzes herausgeschnitten. Der Durchmesser der Stämme war so groß, daß die Jahresschichten innerhalb der Versuchskörper als ein Bündel von parallelen Ebenen betrachtet werden konnten. Diesem Fall elastischer Aelotropie entsprechen neun elastische Konstanten, die Carrington tatsächlich aus der Beobachtung der Längs- und der Querverkrümmung der auf Biegung beanspruchten Holzkörper bestimmt hat. Er erhält drei Werte des Elastizitätsmoduls und sechs Querdrehungsverhältnisse. Sein Bericht enthält ferner Angaben über die Festigkeit des Holzes und den Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes auf die untersuchten Eigenschaften.

[1]) Vergl. auch diese Zeitschrift 1, 1921, S. 482.

**Das Elastizitätsproblem der kreisförmigen Platte veränderlicher Dicke** beschäftigt G. D. Birkhoff (Phil. Mag. 43. S. 953—962, 1922). Er nimmt zwei zu ihrer Ebene symmetrisch gelegene Umdrehungsflächen $z = \alpha t$ als ihre Begrenzung an, wo $\alpha$ eine Funktion der radialen Koordinate $r$ und $t$ eine im Vergleich zum Halbmesser der Platte kleine Zahl bedeutet. Die Rechnung bezieht sich also auf kleine Plattendicken. Es werden in ihr alle Größen nach Potenzen von $t$ entwickelt. Er betrachtet zuerst eine Scheibe, die in ihrer Ebene durch einen auf einem innern Kreisumfang ausgeübten Sprengdruck belastet ist, während ihr äußerer Rand eingeklemmt ist. Eine derart belastete Platte gerät bei einem bestimmten Wert des Druckes in ein labiles Gleichgewicht, was auch erwähnt wird. Aus den anstellten Rechnungen lassen sich keine Einzelheiten über den kritischen Wert des Druckes oder die Form oder die Spannungen der Platte entnehmen. Die Biegung einer Platte durch eine Einzelkraft, die in ihrer Mitte angreift, wird als zweites Beispiel betrachtet, auch hier ohne daß das Problem bis zu einer Differentialgleichung oder einer andern Angabe entwickelt würde, die für die Anwendung weiter verwertbar erscheinen würde.

**Brückenschwingungen.** Einen Anhaltspunkt, wie man die größte Durchbiegung einer in erzwungene Schwingungen geratenen Brücke berechnen kann, gibt Timoschenko (Phil. Mag. 43. S. 1018—1019, 1922) an. Als eine der Hauptursachen für die Erzitterungen von eisernen Brücken großer Spannweite wird der unvollkommene Massenausgleich des Triebwerkes der Lokomotive betrachtet. Man kann in erster Näherung die Brücke als einen frei aufliegenden Stab konstanten Trägheitsmomentes betrachten und nach den Biegungsschwingungen fragen, die eine über den Stab mit einer konstanten Geschwindigkeit dahinfahrende Last von periodisch veränderlicher Stärke in ihm erzwingt. Wenn die Periode der Grundschwingung, die wohl als die maßgebendste zu betrachten ist,

mit dieser Periode zusammenfällt, tritt Resonanz ein. Die Amplituden wachsen bis zum Augenblick, in dem die Lokomotive die Brücke verläßt. Die den Praktiker interessierende größte Durchbiegung der Brücke ist durch die in diesem Zeitpunkt auftretende Schwingungsamplitude gegeben; für ihren Wert kann Timoschenko einen einfachen Ausdruck angeben.

Um die **Randwertaufgabe einer durch zwei sich schneidende Kreisbogen begrenzten elastischen Platte** zu lösen, bedarf es der Kenntnis der Greenschen Funktion der Plattengleichung $\Delta\Delta w = o$ für eine von zwei Kreisbogen begrenzte Sichel, deren Ränder vollkommen eingespannt sind. A. C. Dixon (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2. Vol. 19, Part. 5, 1921, P. 373—386) hat sie aufgestellt. Mit ihrer Hilfe läßt sich nach Hadamard die Durchbiegung einer Platte $w$, die zu gegebenen Randwerten $\overline{w}$ und zu gegebenen Randneigungen $\frac{\partial \overline{w}}{\partial n}$ gehört, durch das über die Randkurve genommene Integral

$$\int \left(\overline{w}\,\frac{\partial \Delta G}{\partial n} - \frac{\partial \overline{w}}{\partial n}\,\Delta G\right) ds$$

darstellen, sofern unter $G$ die Greensche Funktion des eingespannten Randes oder die elastische Fläche verstanden wird, nach der sich die eingespannte Platte unter der im fraglichen innern Punkte angebrachten Lasteinheit verbiegt. Dixon benutzt zu seiner Rechnung Koordinaten, die zur Entstehung der bekannten orthogonalen Kreisscharen führen. Zur Aufstellung des Ausdruckes von $G$ verschafft er sich einen Ausdruck einer allgemeinen Lösung $w$ in der Gestalt eines bestimmten Integrales und setzt ihn dem obigen gleich. Das Integral für $G$, das er zunächst erhält, verwandelt er sodann unter Benutzung der Residuenrechnung in eine unendliche Reihe von Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen. Aus der Sichel folgt in der Grenze, wenn ihre Breite klein wird, ein bemerkenswerter Sonderfall, nämlich die Lösung eines unendlich langen Plattenstreifens mit eingespannten Randgeraden, der eine Einzelkraft trägt. Auch für diesen Belastungsfall kann Dixon eine Reihe angeben, welche nach Exponentialfunktionen $e^{\theta x}$, $e^{i\theta y}$ fortschreitet, wo $\theta a$ die Wurzeln der Gleichung in der komplexen Ebene $\mathfrak{Sin}\,\theta a = \pm\,\theta a$ und $a$ die Breite des Streifens bedeuten. Die Frage nach der Natur der Singularität, wenn eine solche überhaupt in Betracht kommt, in der Ecke einer Platte mit zwei vollkommen eingespannten Rändern dürfte durch die schöne Untersuchung Dixons klargestellt worden sein. Er deutet diesen Punkt nur an, ohne auf ihn näher einzugehen.

**Torsion mit eben bleibenden Querschnitten.** In der St. Venantschen Theorie der Verdrehung von stabförmigen Körpern beschränkt man sich auf die Angabe der Spannungsverteilung ohne Rücksicht darauf, in welcher Weise die Momente sich auf den Stab übertragen. Die Querschnitte verwinden sich mit Ausnahme des kreisförmigen Querschnittes. Gelegentlich der Untersuchung der Spannungszustände von symmetrisch belasteten auf Torsion beanspruchten Stäben, auf die ein Drehmoment im mittleren Querschnitt wirkt, das mit zwei in den Endquerschnitten des Stabes übertragenen halb so großen Momenten Gleichgewicht hält, hat man bemerkt, daß hier ein Fall der Torsion vorliegt, bei dem ein Querschnitt des Stabes eben bleibt. Aus Symmetriegründen muß nämlich der mittlere Querschnitt eines derart belasteten Stabes eben bleiben. Dieser vermeintliche Widerspruch mit den Aussagen der St. Venantschen Theorie hat in der technischen Literatur Anlaß zu verschiedenen Bemerkungen (man vergleiche die Aufsätze von Eggenschwieler[1]) und von Maillart[2])) gegeben. S. Timoschenko (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20, Part. 5, 1922, S. 389—397) weist darauf hin, daß hier das Ebenbleiben des mittleren Querschnittes durch gewisse Spannungen erzwungen wird, mit denen man sich sonst bei der Behandlung von Torsionsaufgaben nicht näher zu beschäftigen pflegt[3]). So muß beispielsweise bei dem von Timoschenko herausgegriffenen Fall ein zusätzliches System von Kräften oder Spannungen in Betracht gezogen werden, das über einen Querschnitt verteilt sich selbst das Gleichgewicht hält. Es ist über den mittleren Querschnitt derart verteilt anzubringen, daß die Verwindung desselben verschwindet. Aus zwei in entgegengesetzter Richtung verdrillten Stäben, deren Endquerschnitte künstlich eben erhalten werden, läßt sich nach ihrer Zusammenfügung der von Timoschenko ins Auge gefaßte Beanspruchungsfall erzeugen (wobei allerdings die Torsionsspannungen im Innern des Stabes, wo sie verschwinden müßten, verbleiben!). In der Praxis spielt die Verdrehung eines flachen Stabes von rechteckigem Querschnitt bei der Biegung des Doppel-T-Trägers eine Rolle. Timoschenko berechnet unter einfachen Annahmen über das Verteilungsgesetz der Zusatzspannung, die aus einem Gleichgewichtssystem von über den mittleren Stabquerschnitt verteilten Normalspannungen besteht, die Störung im St. Venantschen Spannungszustand und insbesondere die Verminderung des Verdrehungswinkels des flachen Stabes, der sich als eine für die Praxis zu merkende Folge der verhinderten Verwindung des Mittelquerschnittes ergibt.

**Biegungsbroblem und gespannte Membran.** Die Lösung des Torsionsproblems eines Stabes hat L. Prandtl auf die Be-

[1]) »Bauingenieur«, Heft 1 und 2, 1922.

[2]) »Schweizerische Bauzeitung« 79, S. 254, 1922.

[3]) Dieselbe Bemerkung macht auch R. Maillart in seinem eben angeführten Aufsatz.

stimmung der Gestalt einer dünnen durch einen gleichmäßigen Druck belasteten Haut zurückgeführt, die man sich über einen mit der Randkurve des Querschnittes zusammenfallenden Rahmen ausgespannt zu denken hat. S. Timoschenko bringt (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20, Part. 5, 1922, P. 398—408) auch das Biegungsproblem eines Stabes mit der Randwertaufgabe einer dünnen Haut in Beziehung. Wenn die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes in die Biegungsrichtung fallen, sind die beiden Schubspannungskomponenten nämlich bis auf eine willkürliche Funktion die partiellen Ableitungen einer »Spannungsfunktion« $\varphi$. Diese genügt der Differentialgleichung einer dünnen Haut, die einem veränderlichen Druck auszusetzen ist. Im Falle einer Ellipse, eines Rechtecks und eines Dreiecks kann die willkürliche Funktion so gewählt werden, daß die Spannungsfunktion $\varphi$ auf der Randkurve des Querschnittes konstante Werte annimmt. Recht brauchbare Ausdrücke für $\varphi$ lassen sich nach Ritz-Rayleigh aufstellen. Man schreibt die die Grenzbedingungen befriedigenden Ansätze für $\varphi$ an und bestimmt ihre Beiwerte so, daß die potentielle Energie des auf der Membran lastenden Druckes und ihre Oberflächenenergie ein Minimum werde. Timoschenko vergleicht die so erhaltenen Werte der Spannung mit den aus den strengen Lösungen berechneten und findet eine sehr gute Uebereinstimmung. Bei dieser Gelegenheit stellt er einige Zahlen in den von St. Venant berechneten Tafeln für die Spannungsverteilung im rechteckigen Querschnitt richtig.

Zur **Bestimmung der Schlaghärte** eines Werkstoffes läßt G. Moreau (Journal de Physique, II. Ser. 6, P. 329—340, 1921) eine an einem dünnen Kupferdraht aufgehängte Stahlkugel wie ein Pendel gegen eine lotrecht gestellte Platte aus dem zu untersuchenden Stoff aufprallen und mißt die Fall- und die Rücksprunghöhe, ferner mittels eines ballistischen Galvanometers den Stromstoß eines durch den Aufhängedraht und den Versuchskörper während der Berührung hindurchgehenden Stromes. Aus der Beobachtung des Strommessers kann er entweder die Zeitdauer der Berührung oder den elektrischen Widerstand des Kontaktes bestimmen. Bei einer Auftreffgeschwindigkeit von 1 m/s findet er bei verschiedenen Stoffen für die Dauer der Berührung Zeiten von einer Zehntausendstel bis zu einer Fünfzigstel Sekunde. Die Berührungszeit setzt sich zusammen aus der Eindringungszeit $\tau_1$ bis die Geschwindigkeit der Kugel von ihrem Anfangswert $v$ bis Null abgenommen hat, der Rückfederungsdauer $\tau_2$, während der sie von Null wieder auf $v'$ zunimmt und den Zeiten, die zur Ausbildung und zur Unterbrechung des elektrischen Kontaktes noch ehe die Metalle sich berühren oder sich voneinander gänzlich getrennt haben, verstreichen. Um ein Maß für die Schlaghärte zu bilden, berechnet er die mittlere Schlagkraft während der Eindringungsdauer $\tau_1$ $m v/\tau_1$ ($m$ Masse der Kugel) und dividiert sie durch die Hälfte der bleibenden Eindruckfläche. Diese Schlaghärte soll nach seinen Angaben unabhängig von der Auftreffgeschwindigkeit der Kugel sein.

A. Nádai. 200

# KLEINE MITTEILUNGEN

**Bemerkungen über eine besondere Art von Rechentafeln.** Die allgemeine Form einer Gleichung mit drei Veränderlichen $t$, $u$, $v$, welche durch eine ausschließlich aus geradlinigen Skalen bestehende Rechentafel gelöst werden kann, ist

$$A\varphi + B\psi + C\chi + D\varphi\psi + G\varphi\chi + H\psi\chi + L = \theta \quad . \; . \; . \quad (1),$$

wobei $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ Funktionen von $t$, $u$ und $v$ der Reihe nach sind und $A$, $B$ usw. konstante Koeffizienten bedeuten. Diese Gleichung kann auf die Form einer Determinante überführt werden

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi & 1 \\ mD\psi + 1 & m\dfrac{B - mDL}{1 - mA}\psi & 1 \\ -mG\chi + 1 - mA & -mC\chi - mL & 1 \end{vmatrix} = \theta \quad (2),$$

in welcher $m$ durch die Bedingung

$$m^2 D(AC - GL) + m(GB - AH - CD) + H = \theta \quad . \; . \; . \quad (3)$$

bestimmt ist. Wird $m$ komplex oder gleich $\frac{1}{A}$, so ist die Anwendung einer Rechentafel angegebener Art auf die Lösung von (1) ausgeschlossen. Ist dies nicht der Fall, so besteht die die Gl. (1) lösende Rechentafel aus drei Geraden, die in einem recht- oder schiefwinkeligen Koordinatensystem $x$, $y$ durch die Gleichungen

1) $x = \theta$ $\qquad y = \varphi$

2) $x = mD\psi + 1$ $\qquad y = m\dfrac{B - mDL}{1 - mA}\psi$

3) $x = -mG\chi + 1 - mA$ $\qquad y = -mC\chi - mL$

bestimmt sind. Die auf diese drei Geraden aufzutragenden Skalen hängen nur von der Gestalt der Funktionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ ab. Im Falle einer linearen Skalierung, d. h. $\varphi = t$, $\psi = u$, $\chi = v$, löst die Rechentafel eine Gleichung von der Form

$$At + Bu + Cv + Dtu + Gtv + Huv + L = \theta \quad . \; . \; . \quad (4),$$

im Falle logarithmischer oder teilweise logarithmischer und teilweise linearer Skalierung entsprechende, aus Gl. (1) sich ergebende Gleichungsformen. Die Bedingung für die Lösbarkeit liegt in allen Fällen nur in der Gl. (3) für $m$.

Andere als die hier angegebenen Gleichungen sind nicht durch die einfache Grundoperation (d. h. Anlegen eines Lineals) auf nur geradlinigen und nur linearen oder logarith-

mischen Skalen lösbar. Will man andere Gleichungsformen mit diesen einfachen Mitteln behandeln, so kann es nur in der Weise geschehen, daß die Grundoperation noch einmal auf anderen Skalen wiederholt wird, die den schon einmal benutzten Funktionen entsprechen. Dieser Umstand ermöglicht gleichzeitig eine einfache und leichte Konstruktion der Tafel und führt zu einer größeren Uebersichtlichkeit des Rechnungsvorganges bei der Benutzung der Tafel.

Fügen wir den obigen Funktionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ zwei Hilfsfunktionen $\tau_1$ und $\tau_2$ zu, und bilden zwei Gleichungen von der Form (1), d. h.

$$A\tau_1 + B\psi + C\chi + D\tau_1\psi + G\tau_1\chi + H\psi\chi + L = 0 \quad . \; . \; . \quad (5),$$

$$A'\tau_2 + B'\varphi + C'\chi + D'\tau_2\varphi + G'\tau_2\chi + H'\varphi\chi + L' = 0 \quad . \; . \; . \quad (6),$$

die durch zwei einfache Rechentafeln gelöst werden können, und verbinden diese beiden Tafeln so, daß der Uebergang einer Beziehung $\tau_1 = f(\tau_2)$ entspricht, so löst die so entstehende Rechentafel eine Gleichung

$$-\frac{B\psi + C\chi + H\psi\chi + L}{A + D\psi + G\chi} = f\left(-\frac{B'\varphi + C'\chi + H'\varphi\chi + L'}{A' + D'\varphi + G'\chi}\right) \quad . \; . \; . \quad (7).$$

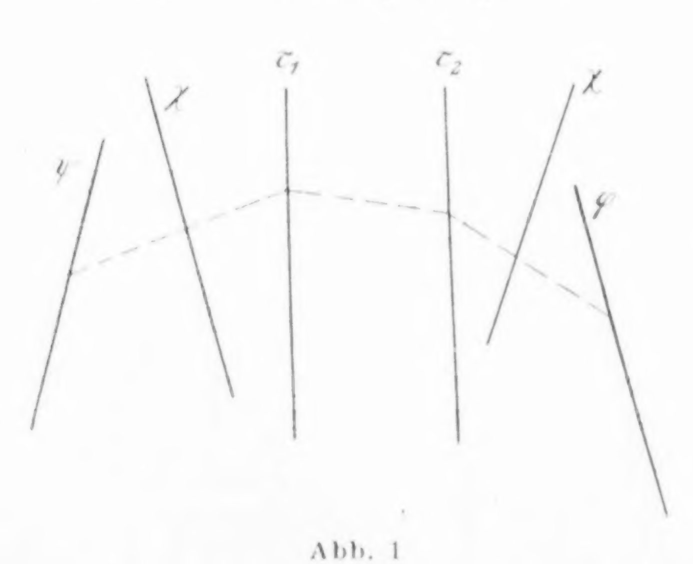



Abb. 1

Eine Tafel dieser Art enthält, wie schematisch in Abb. 1 angedeutet, die Skalen $\psi$, $\chi$ und $\tau_1$, welche die Gl. (5), und die Skalen $\tau_2$, $\chi$, $\varphi$, welche die Gl. (6) lösen. Da die Skalierung sämtlicher Skalen nur von den Funktionen $\varphi$ usw. abhängt und da die Funktion $f$ beliebig ist, so gibt (7) eine allgemeine Form einer Gleichung an, die durch eine zweifache Rechentafel mit nur geradlinigen Skalen ge-

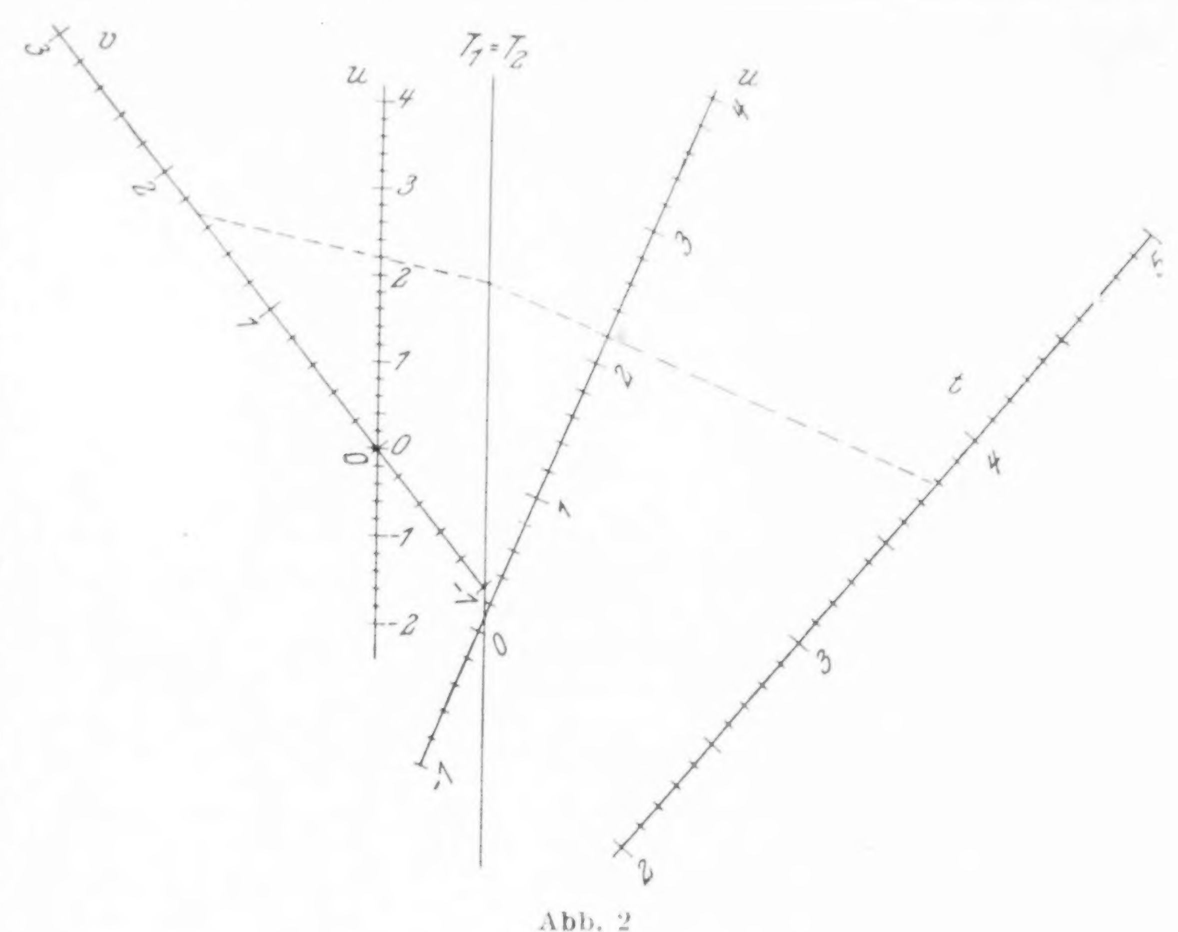



Abb. 2

löst werden kann. Um aber den Uebergang von $\tau_1$ auf $\tau_2$ möglichst einfach durchführen zu können, muß die Funktion $f$ auch nur einfache Form annehmen; z. B. kann $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 = \log \tau_2$, $\tau_1 = \tau_2 + 1$ usw. gesetzt werden.

Sind sämtliche Skalen der Tafel linear, d. h. $\varphi = t$, $\psi = u$, $\chi = v$, $\tau_1 = T_1$, $\tau_2 = T_2$, und ist der Uebergang durch $T_1 = T_2$ bestimmt, so kann die Gl. (7) bei entsprechend geänderter Bezeichnung der Koeffizienten auf die Form

$$t = -\frac{Au^2v + Du^2 + Euv + Hu + Lv + N}{Bu^2 + Cuv + Fu + Gv + M} \quad (8)$$

transformiert werden, und sie wird mit Hilfe von zwei einfachen Rechentafeln gelöst, welche den auf die Form (4) überführbaren Gleichungen

$$-T_1 = \frac{b_1 u + c_1 v + h_1 vu + l_1}{a_1 + d_1 u + g_1 v},$$

$$-T_2 = \frac{b_2 u + c_2 v + h_2 uv + l_2}{a_2 + d_2 u + g_2 v}$$

entsprechen.

Die Koeffizienten $a_1$, $b_1$ usw. und $a_2$, $b_2$ usw. sind zu berechnen aus einem System von 11 Gleichungen, die man erhält, wenn man die Gleichung $T_1 = T_2$ auf die Form (8) bringt und die entsprechenden Koeffizienten einander vergleicht. Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe wird hier nicht angegeben, da sie auf verwickelte Ausdrücke führt. Wenn aber einige von den Koeffizienten der Gl. (8) verschwinden, so wird die Lösung erleichtert; so z. B. können für eine Gleichung

$$t = -\frac{Au^2v + Du^2 + Euv + Hu + Lv}{Cvu + Fu + Gv} \quad (9)$$

die gesuchten Koeffizienten gleich gesetzt werden:

$$a_1 = 0,\ b_1 = D,\ c_1 = 0,\ d_1 = 1,$$
$$g_1 = -\frac{A}{D},\ h_1 = A,\ l_1 = 0,$$
$$a_2 = \frac{H}{D},\ b_2 = E\frac{D}{A} - L,\ c_2 = G\frac{D}{A},\ d_2 = 1,$$
$$g_2 = \frac{F}{D},\ h_2 = C\frac{D}{A} - F,\ l_2 = L\frac{D}{A}.$$

Dabei ist in den entsprechenden Determinanten nach (2) der Faktor $m$ zu setzen $m_1 = 1$, $m_2 =$ einer Wurzel von (3), wo $a_2$ statt $A$ usw. gesetzt wird.

Anwendungsbeispiele.

1. Die Gleichung

$$t = \frac{u^2 v + u^2 + 5{,}65\,uv + 3{,}5\,u + 1{,}25\,v}{0{,}75\,uv + 3\,u + 1{,}33\,v}$$

kann nach dem für die Gl. (9) angegebenen Verfahren gelöst werden. Den beiden Determinanten entspricht die Tafel Abb. 2. Für $u = 2{,}2$, $v = 1{,}7$ erhält man in der durch punktierte Linien angegebenen Weise den gesuchten Wert $t = 3{,}78$.

2. Die Gleichung

$$x^\alpha + p x^\beta - q = 0$$

kann geschrieben werden in der Form

$$\log q = \log x^\alpha + \log\left(1 + \frac{p}{x^{\alpha-\beta}}\right).$$

Setzt man

$$\log T_1 = \log q - \log x^\alpha,$$
$$\log T_2 = \log p - \log x^{\alpha-\beta},$$

so ist der Uebergang zwischen den beiden Systemen gegeben durch

$$T_1 = T_2 + 1.$$

Nach diesen Beziehungen ist für $\alpha = 3$, $\beta = 2$ die Tafel (Abb. 3) konstruiert worden. Für gegebene Werte von $p$ und $q$ bestimmt man den Wert von $x$ in folgender Weise: Verbindet man den Punkt $q$ mit $x$, so erhält man auf der Skala $T_2$ einen nicht abzulesenden Wert $T_2$; von $T_2$ ausgehend, geht man längs den eingezeichneten Richtungslinien auf die Skala $T_1$ über, um den Punkt $T_1$ zu erhalten. Durch weitere Verbindung von $T_1$ mit $x$ ergibt sich auf der $q$-Skala der Wert $q$. Findet man durch Versuch einen Wert $x$ so, daß der gefundene Wert $q$ mit dem gegebenen $q$ übereinstimmt, so ist die Lösung der Gleichung $x^3 + px^2 - q$ durchgeführt. Der Gang der Rechnung ist auf einem Schema (Abb. 3) unten angedeutet. Die eingezeichneten Geraden entsprechen einem Fall $p = 2{,}5$, $q = 2{,}9$, für welchen sich $x = 0{,}885$ ergibt.

3. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man im Falle einer vollständigen Gleichung 3ten Grades

$$x^3 + px^2 + qx - r = 0$$

zu den Ausdrücken

$$\log\frac{r}{q} = \log x + \log\left(1 + \frac{x^2}{r} + \frac{x}{r}p\right)$$
$$= \log x + \log A,$$
$$\log B = \log\frac{x^2}{r} + \log\left(1 + \frac{p}{x}\right) = \log\frac{x^2}{r} + \log C,$$
$$\log D = \log p - \log x,$$
$$A = B + 1,$$
$$C = D + 1.$$

Die entsprechende Tafel und der Gang der Rechnung ist schematisch in Abb. 4 angegeben. Die Lösung der Gleichung geschieht, wie im vorgehenden Falle, versuchsweise, d. h. man bestimmt für ein gewähltes $x$ den Wert $p$ $\left(\text{oder } \frac{r}{q}\right)$.

4. Die zur Berechnung von Hohlzylindern dienende Formel

$$r_a = r_i\sqrt{\frac{K + 0{,}6\,p}{K - 1{,}3\,p}},$$

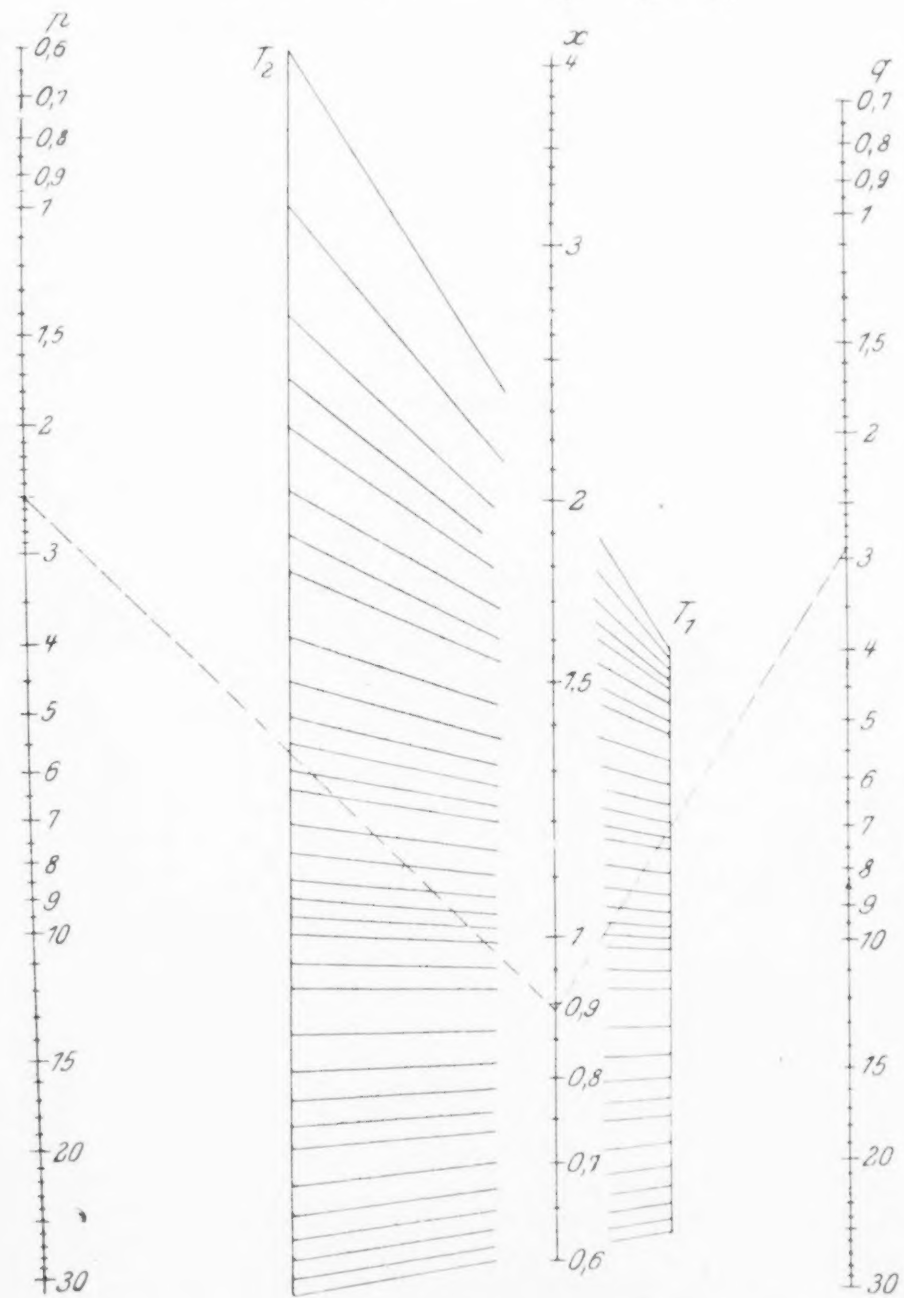



Abb. 3

x p D C r B A r/q

Abb. 4

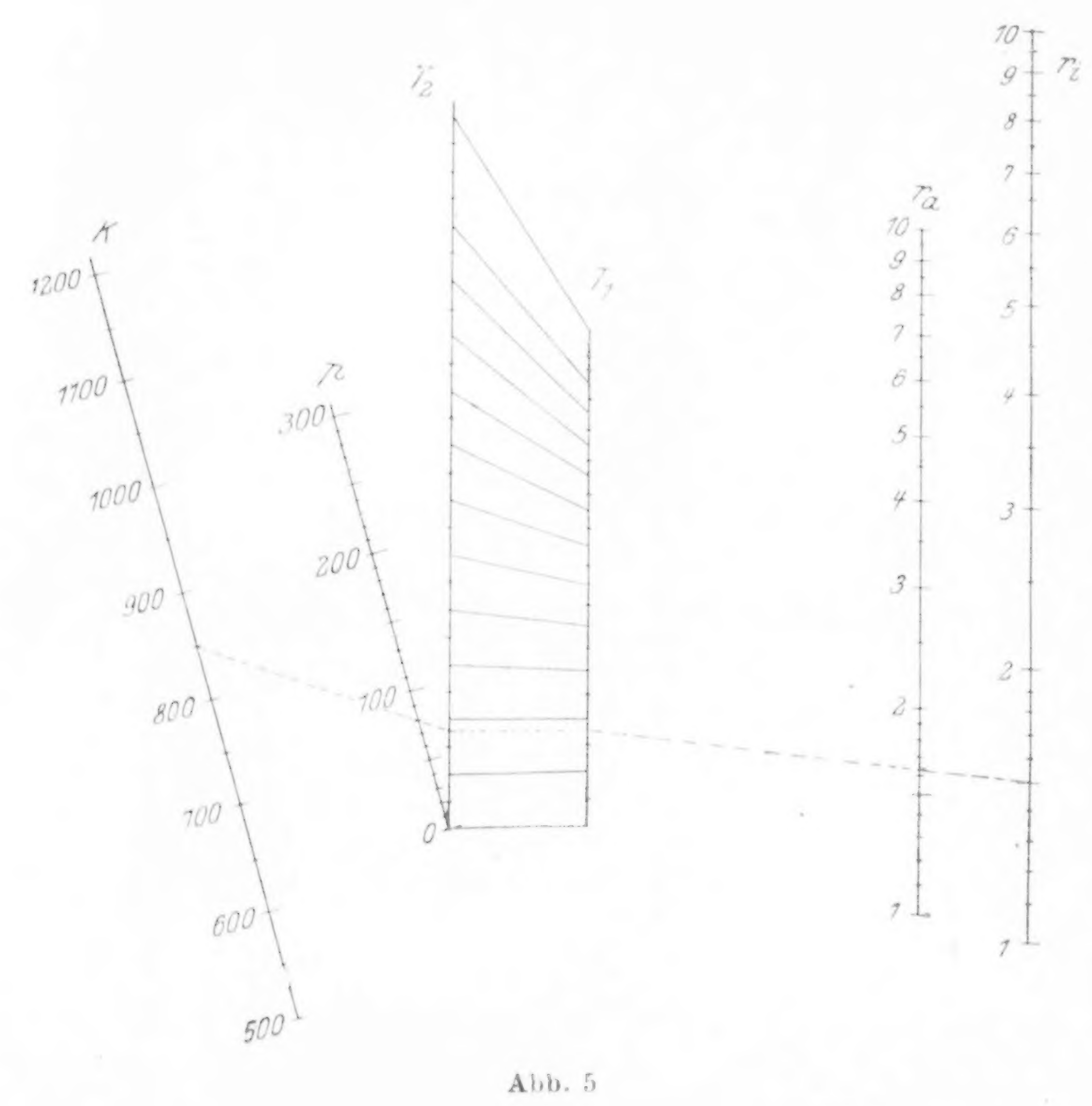



Abb. 5

in welcher bedeutet $K$ = Beanspruchung des Materials in kg/cm², $p$ = innerer Ueberdruck in kg/cm², $r_i$ = innerer, $r_a$ = äußerer Halbmesser des Zylinders, kann zerlegt werden in

$$T_1 = \frac{r_a}{r_i}, \qquad T_2 = \frac{K + 0{,}6\,p}{K - 1{,}3\,p},$$

so daß die Gleichung für den Uebergang wird $T_1 = \sqrt{T_2}$. Der Wert $T_2$ wird mit Hilfe von zwei linearen Skalen $K$ und $p$ gefunden; die Skalen für $T_1$, $r_a$, $r_i$ sind logarithmisch. Es ist also in diesem Falle $\tau_2 = T_2$, $\tau_1 = \log T_2$ und $\tau_1 = \frac{1}{2} \log \tau_2$, so daß die zum Uebergang dienenden Richtungslinien leicht durch Verbindung der entsprechenden Punkte der logarithmischen Skala $T_1$ und der linearen Skala $T_2$ konstruiert werden können (Abb. 5). Für $K = 850$, $p = 80$, $r_i = 15$ ergibt sich z. B. $r_a = 16{,}3$. J. Hak. 207

**Gleichgewichtsform eines elastisch dehnbaren Fadens (elastische Kettenlinie).** Als »gemeine Kettenlinie« bezeichnet man bekanntlich die Gleichgewichtsform eines vollkommen biegsam gedachten unelastischen Fadens gleichen Querschnittes aus homogenem Material, der unter dem Einfluß seines Eigengewichtes steht.

Dieser Kurve läßt sich nun mit verhältnismäßig einfacher mathematischer Gedankenfolge eine andere, mit ihr sehr verwandte Linie gegenüberstellen, indem man die elastische Deformation der Fadenelemente in der Längsachse des Fadens berücksichtigt. Der aus dieser Annahme hervorgehenden neuen Kurve, der wir zur Unterscheidung von der gemeinen Kettenlinie den Namen »Elastische Kettenlinie« geben wollen, dürfte, wie später angedeutet werden wird, in der Technik eine gewisse Bedeutung nicht abgesprochen werden können. Ihre Gleichung soll daher hier entwickelt werden.

I. Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Ist $E$ die Elastizitätszahl des Materials und $s$ die Normalspannung in einem beliebigen Fadenpunkt $P_i$, so ist die auf das betreffende Fadenelement $dl$ entfallende Längenänderung (Abb. 1 und 2):

$$d\lambda = \frac{s}{E}\, dl \quad . \quad . \quad (1).$$

Faßt man im Sinne der Abb. 2 $P_i$ als Knotenpunkt einer Gliederkette mit vollkommen reibungslosen Gelenken auf, so gelten für diesen die beiden Gleichgewichtsbedingungen der Ebene, wonach die Summe der Horizontalkräfte und die Summe der Vertikalkräfte für sich verschwinden müssen

Die erste Bedingung gibt:

$$- s \cos \varphi + (s + ds) \cos (\varphi + d\varphi) = 0$$

oder nach Weglassung der Glieder höherer Kleinheitsordnung:

$$0 = ds \cos \varphi - s \sin \varphi\, d\varphi \text{ bezw. } \frac{ds}{s} = \operatorname{tg} \varphi\, d\varphi \quad (2).$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\ln s = \int_0^{\varphi} \operatorname{tg} \varphi\, d\varphi + \ln C.$$

Für $\varphi = 0$ ist $\cos \varphi = 1$ und $s$ gleich der Horizontalspannung $h$, daher $C = h$. Allgemein hat man, da die Horizontalkomponente der Spannung konstant $h$ ist:

$$s = \frac{h}{\cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist $F$ der Fadenquerschnitt, $S$ die örtliche Kraft in der Fadenachse und $H$ deren Horizontalkomponente (Horizontalzug), so läßt sich wegen $Fs = S$ und $Fh = H$ für (3) auch schreiben:

$$S = \frac{H}{\cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a}).$$

Aus der Substitution von (3) in (1) ergibt sich:

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{h}{E}\,\frac{1}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung folgt, wenn $\gamma$ das spezifische Gewicht des Fadenmaterials bedeutet:

$$-s\sin\varphi + (s+ds)\sin(\varphi + d\varphi) + \gamma\, dl = 0,$$

oder nach Weglassung der Glieder höherer Ordnung:

$$0 = ds\sin\varphi + s\cos\varphi\, d\varphi + \gamma\, dl,$$

woraus mit Rücksicht auf (2) und (3), d. i. wegen

$$\frac{ds}{d\varphi} = s\operatorname{tg}\varphi = h\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},\quad s\cos\varphi = h$$

nach einfacher Rechnung sich ergibt:

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{h}{\gamma}\,\frac{1}{\cos^2\varphi} \quad \ldots (5).$$

Durch die beiden Differentialbeziehungen (4) und (5) ist die Gleichgewichtsform des elastischen Fadens analytisch definiert. Multipliziert man aber (4) mit (5), so wird

$$\frac{d\lambda}{dl}\,\frac{dl}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\varphi} = -\frac{h^2}{\gamma E}\,\frac{1}{\cos^3\varphi} \quad (6).$$

An Stelle von (4) tritt so eine neue Differentialgleichung, in der $l$ und $\varphi$ statt $\lambda$ und $l$ vorkommen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{h}{\gamma} = k_1;\quad \frac{h^2}{\gamma E} = k_2;\quad \frac{h}{E} = k_3 \quad (7),$$

wobei $k_1$ und $k_2$ die Dimensionen einer Länge haben, während $k_3$ eine unbenannte Zahl ist, so erhält man aus (5) und (6)

$$dl = -k_1\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad . \ (5\,\mathrm{a})$$

$$d\lambda = -k_2\frac{1}{\cos^3\varphi}\,d\varphi \quad . \ (6\,\mathrm{a})$$

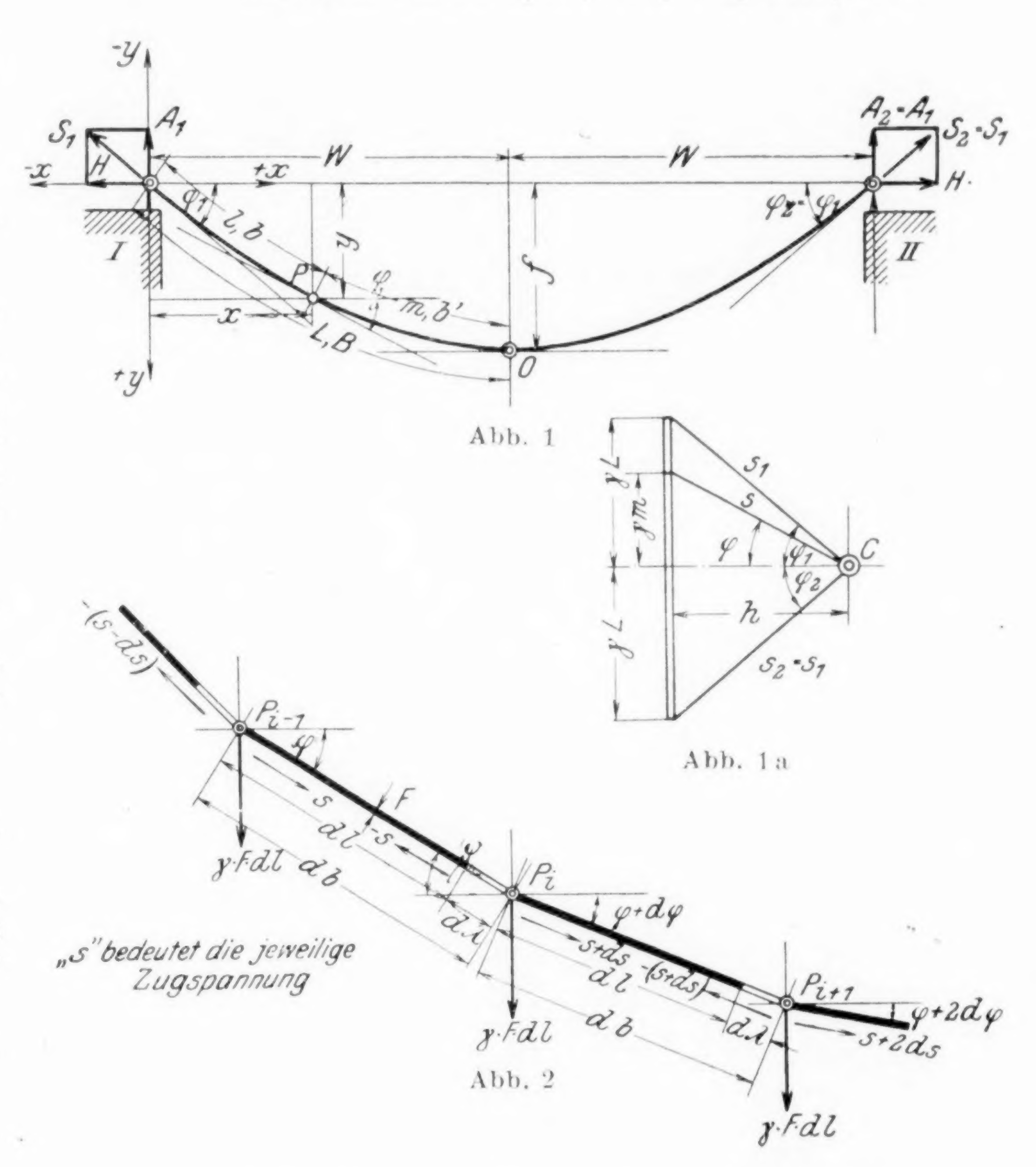



Abb. 1

Abb. 1 a

Abb. 2

erhält und für $\varphi = \varphi_1 =$ dem Auflagerwinkel

$$W = k_1 \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) + k_2 \operatorname{tg}\varphi_1 \quad (\mathrm{I\,b})$$

wird.

In ähnlicher Weise erhält man aus (9)

$$y = -k_1\frac{1}{\cos\varphi} - k_2\frac{1}{2\cos^2\varphi} + C_y,$$

wobei für Abb. 1 $C_y = f + k_1 + k_2$ wird, weshalb die vom Niveau des linken Auflagerpunktes nach unten als positiv gezählte Ordinate den Wert

$$y = f + k_1\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right) + k_2\left(1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) \quad (\mathrm{II\,a})$$

hat und die Pfeilhöhe sich mit

$$f = k_1\left(\frac{1}{\cos\varphi_1} - 1\right) + k_2\left(\frac{1}{2\cos^2\varphi_1} - 1\right) \quad (\mathrm{II\,b})$$

ergibt.

An Stelle von $l$ und $\lambda$ lassen sich leicht die rechtwinkligen Koordinaten $x$ und $y$ einführen, denn es ist:

$$dx = (dl + d\lambda)\cos\varphi = -k_1\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - k_2\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad (8)$$

$$dy = (dl + d\lambda)\sin\varphi = -k_1\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi - k_2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi \quad \ldots (9).$$

Das allgemeine Integral von (8) ist:

$$x = -k_1 \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - k_2 \operatorname{tg}\varphi + C_x,$$

woraus sich für das in Abb. 1 dargestellte, durch die Spannweite $2\,W$, die Pfeilhöhe $f$ und die Fadenlänge $2\,l$ (im spannungslosen Zustand) definierte Beispiel $C_x = W$ ergibt, so daß man für die vom linken Auflager aus gezählte Abszisse

$$x = W - k_1 \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) k_2 \operatorname{tg}\varphi \quad (\mathrm{I\,a})$$

Damit ist die Gleichung der elastischen Kettenlinie in aller Strenge aufgestellt und zwar zunächst so, daß die Koordinaten $x$ und $y$ als Funktionen des Parameters $\varphi$ erscheinen.

Außer den Koordinaten $x$ und $y$ und deren Sonderwerten $W$ und $f$ ist noch eine weitere Größe von Interesse, nämlich die Längenänderung (»Reckung«) eines beliebigen Kurvenstückes gegenüber der spannungslosen (»starren«) Länge.

Die Integration von (6 a) gibt allgemein:

$$\lambda = -\frac{k_2}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{k_2}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C_\lambda.$$

Speziell für die in Abb. 1 gezeichnete Kurve ist $C\lambda = \varDelta$, d. i. gleich der gesamten Reckung vom linken Auflager I bis zur Kurvenmitte (Scheitel 0). Dabei wird die Reckung von I bis zu einem beliebigen Punkt:

$$\lambda = \varDelta - \frac{k_2}{2}\frac{\sin\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} - \frac{k_2}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad \text{(III a)}$$

und

$$\varDelta = \frac{k_2}{2}\frac{\sin\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} + \frac{k_2}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad \text{(III b).}$$

## II. Umformung und mechanische Deutung der analytischen Ergebnisse.

Die im Vorstehenden gewonnenen Formeln für die Spannweite $2W$ und die Pfeilhöhe $f$ der elastischen Kettenlinie, sowie für die elastische Längenänderung (Reckung) $\varDelta$ des Fadens sind in allen Fällen, in denen der Winkel $\varphi$ als Angabe vorliegt, sofort anwendbar. Die verschiedenen technischen Aufgaben, für welche die Gleichung der elastischen Kettenlinie in Betracht kommt, erfordern aber je nach der Gruppierung der gegebenen und der gesuchten Bestimmungsstücke Umformungen der in den Ausdrücken (I) bis (III) festgehaltenen analytischen Beziehungen. Die durch den Zweck der jeweils vorliegenden speziellen Aufgabe bestimmte Umformung geschieht bei der elastischen Kettenlinie ganz analog wie bei der gemeinen Kettenlinie und es ist auch hier möglich entweder an Stelle des Winkels $\varphi$ die Bogenlänge $l$ als Parameter zu verwenden oder die Kurvenordinaten als Exponentialfunktion der Abszissen darzustellen, usw.

Hier soll nur die Transformation der Gl. (I) bis (III) vom Parameter $\varphi$ auf den Parameter $l$ bzw. $L$ (Bogenlänge) kurz behandelt werden, da in dieser Darstellung der Unterschied zwischen der gemeinen und der elastischen Kettenlinie am augenfälligsten ist.

Mit Hilfe der goniometrischen Beziehung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} \quad (10)$$

und des aus der Abb. 1a zu entnehmenden Zusammenhanges

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\gamma L}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

sowie auf die in (7) angegebene Bedeutung der Konstanten $k_1$, $k_2$, $k_3$ erhält man aus (Ib), (IIb), (IIIb):

$$W = \frac{h}{\gamma}\ln\frac{\gamma L + \sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2}}{h} + \frac{h}{E}L \quad \text{(IV)},$$

$$f = \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2} - h\right) + \frac{\gamma}{2E}L^2 \quad \text{(V)},$$

$$\varDelta = \frac{L}{2E}\sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2} + \frac{h^2}{2\gamma E}\ln\frac{\gamma L + \sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2}}{h} \quad \ldots \quad \text{(VI)}.$$

In den Formeln (IV) und (V) sind die ersten Glieder rechts genau die gleichen wie bei der gemeinen Kettenlinie, während die letzten Addenden jene Zusatzglieder bedeuten, die man an die für die gemeine Kettenlinie geltenden Werte der Spannweite bzw. Pfeilhöhe anfügen muß, um jene der elastischen Kettenlinie zu erhalten. Die Formel (VI) besteht natürlich zur Gänze nur bei der elastischen Kettenlinie.

Die in (IV) und (V) auftretenden Zusatzglieder, die wir auch sinngemäß als »elastische Korrekturen« bezeichnen können, haben ebenso wie die in Formel (VI) definierte Längenänderung (Reckung) $\varDelta = \Delta L$ anschauliche Bedeutung. Wenn wir unter $2\overline{W}$ und $\overline{f}$ die Spannweite bzw. die Pfeilhöhe der zugehörigen gemeinen Kettenlinie verstehen, so ist $\Delta\overline{W} = \frac{h}{E}L =$ der elastischen Längenänderung eines unter der Spannung $h$ stehenden Fadens von der Länge $L$; $\Delta\overline{f} = \frac{\gamma}{2E}L^2 =$ der elastischen Längenänderung eines frei herabhängenden Fadens infolge der Wirkung des Eigengewichtes.

Endlich kann die Reckung $\varDelta$, da die Spannung am Auflager $s_1 = \sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2}$ und $\overline{W} = \frac{h}{\gamma}\ln\frac{\gamma L + \sqrt{h^2 + \gamma^2 L^2}}{h}$ ist, auch geschrieben werden:

$$\varDelta = \frac{1}{2}\frac{L}{E}s_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{E}\overline{W} = \varDelta_1 + \varDelta_2,$$

woraus man erkennt, daß $\varDelta_1$ die elastische Längenänderung eines Fadens von der Länge $L$ ist, welcher unter der Wirkung einer Zugspannung $s_1$ steht, während $\varDelta_2$ die elastische Längenänderung eines durch eine Zugspannung $h$ beanspruchten Fadens von der Länge $\overline{W}$ bedeutet.

## III. Bemerkung über die Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Die hier der Kürze halber nur für den einfachsten Fall gleich hoher Auflager entwickelten Formeln können unschwer auf ungleich hohe Auflager erweitert werden. Ebenso lassen sich übersichtliche Formeln für den Fall aufstellen, daß der elastisch dehnbare Faden durch örtlich fixierte oder durch bewegliche Einzelgewichte (etwa Seilbahnwagen) belastet ist.

Damit ist die Möglichkeit gegeben, die theoretischen Ergebnisse in der technischen Praxis anzuwenden, und zwar dürfte sich zunächst in der Geodäsie hierzu Gelegenheit bieten. Vergl. hierzu: Regierungsbaumeister Schuster, Zürich, »Längenmessung der Brücke über den Firth of Forth«, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1907, S. 506, auf welche Veröffentlichung ich im Jahre 1917 durch Herrn Prof. A. F. Zschetzsche in Wien aufmerksam gemacht wurde. Neuerdings hat auch Herr Prof. R. Findeis in Wien mir gegenüber die Ausgestaltung der hier wiedergegebenen strengen Theorie der Kettenlinie für direkte Längenmessung mittels Drähten als wünschenswert hingestellt.

Wien. F. Skrobanek. 208

# BUCHBESPRECHUNGEN

Dipl.-Ing. CONSTANTIN **WEBER**, Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 249. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921. 70 S.

Die Ergebnisse der theoretischen Mechanik vermögen nur dann ihre volle Bedeutung auch in technisch-wirtschaftlicher Hinsicht zu erweisen, wenn es gelingt, sie jenen Personen in einer brauchbaren Gestalt bekannt zu machen, die sie unmittelbar konstruktiv zur Anwendung bringen können. Dies trifft insbesondere für die Ergebnisse der neueren Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu, die die Einsicht in das Kräftespiel in den einzelnen Konstruktionsteilen vertiefen und durch Erzielung einer vollen Ausnutzung aller Teile das in technischer und wirtschaftlicher Hinsicht gleich schädliche Ueberdimensionieren vermeiden sollen. Immerhin ist es erstaunlich, wie lange Zeit es braucht, bis theoretisch gefundene Ergebnisse sich in der Praxis eingebürgert haben und für alle praktischen Bedürfnisse ausgebaut sind. Nicht selten begegnet man dann voreiligen Verallgemeinerungen empirischer Formeln, die späterhin zu Widersprüchen mit ausgeführten Versuchen führen und dadurch dem in manchen Kreisen der Praktiker noch bestehenden Mißtrauen gegen die »Theorie« neue Nahrung geben. Ein besonders augenfälliges Beispiel dafür bildet die »Lehre von der Drehungsfestigkeit« (müssen wir in unserem demokratischen Zeitalter auch auf dieses »von« verzichten? — der Titel ist übrigens irreführend und trifft nicht den Inhalt), deren theoretische Grundlagen zwar seit mehr als 70 Jahren fertig vorliegen, die aber erst in der allerjüngsten Zeit für die technisch wichtigen Walzeisenquerschnitte zu einigermaßen gesicherten Formeln geführt haben. Was Wunder, wenn heute noch in sehr verbreiteten Ingenieur-Handbüchern Formeln empfohlen werden, die vielfach ganz unzutreffend sind?

Angesichts dieser Tatsache ist die Frage nicht von der Hand zu weisen, ob die theoretischen Ergebnisse immer in einer solchen Form und mit allen vor unzulässigen Verallgemeinerungen schützenden Einschränkungen dargeboten werden, die sie für den ausführenden Ingenieur tauglich machen. Trotz mancher schätzenswerten Ansätze und aller Fortschritte, die in der Ordnung des Tatsachenmaterials erreicht wurden, glauben wir diese Frage keineswegs bedingungslos bejahen zu dürfen, es scheint vielmehr notwendig, die Frage der Nutzbarmachung der gesicherten theoretischen Ergebnisse fortgesetzt im Auge zu behalten und durch besondere Einrichtungen zu fördern. Uebersichtlich und klar geschriebene Bearbeitungen von Sondergebieten mit Angabe der Bedeutung der einzelnen Ergebnisse und Hinweis auf die Einschränkungen werden zu einer solchen Nutzbarmachung vor allem dienlich sein können.

Das vorliegende Heft der Forschungsarbeiten enthält eine ausführliche Darstellung des Torsionsproblems für prismatische Körper mit verschiedenen Querschnitten, insbesondere bringt sie für die technisch wichtigen »Profile« (streifenartige Querschnitte) eine Reihe angenäherter Formeln, über deren Uebereinstimmung mit ausgeführten Versuchen darin allerdings noch keine Angaben gemacht werden, da zuverlässiges Versuchsmaterial nur in sehr geringem Ausmaße vorhanden ist und das Heft vor Veröffentlichung der neuen Versuche von A. Föppl erschienen ist. Im ersten Abschnitt werden in anschaulicher Weise die Grundgleichungen entwickelt, der zweite enthält deren Anwendung für die exakt behandelbaren Sonderfälle, wie Kreis, Kreisring, Ellipse, gleichseitiges Dreieck, Rechteck, Kreis mit Halbkreisrille und mit scharfer Einkerbung am Umfange u. dergl.; dabei ist als neu auf die bisher auf direkte Weise nicht behandelten Vielecke mit geraden Seiten hinzuweisen, für die der Verfasser einen auch für die numerische Berechnung brauchbaren, durch Erweiterung der Saint-Venantschen Lösung für das Quadrat gefundenen Reihenansatz verwendet.

Im dritten Abschnitt werden die ringförmigen und streifenartigen Querschnitte behandelt, unter die auch die technisch wichtigen Profile fallen. Die Hilfsmittel hierfür sind im wesentlichen die schon von A. Föppl für diese Fälle gegebenen Formeln für das Torsionsmoment und die Schubspannung.

Durch Einführung von mittleren Spannungslinien, deren »theoretische Längen« $l_i$ passend abgeschätzt werden, gelangt der Verfasser für »streifenartige« Querschnitte von konstanter Breite $s$ zu der angenäherten Formel für das Torsionsmoment

$$M \sim \frac{1}{3} G \vartheta l_i s^3 ,$$

die für mehrere Beispiele wie **L**-, **T**-, +-, **Z**-, **Ꞁ**- und **[**-Eisen ausgewertet wird. (Nach denselben Erwägungen wird auch eine Formel für Streifenquerschnitte mit veränderlicher Breite aufgestellt.) Für zusammengesetzte Streifenquerschnitte mit verschiedenen Breiten der einzelnen Streifen ist die Formel durch die folgende zu ersetzen

$$M \sim \frac{1}{3} G \vartheta \Sigma l_i s^3$$

somit das Torsionsmoment durch die Summe der Torsionsmomente für die einzelnen Streifen dargestellt. Die neueren Versuche von A. Föppl haben gezeigt, daß dieses Additionsgesetz i. a. nicht zutrifft und durch Hinzufügung von Faktoren berichtigt werden muß. In verstärktem Maße dürfte sich dieser Umstand bei den zusammengesetzten Querschnitten von der Art der Schienenprofile geltend machen, die der Verfasser, ohne auf einschlägige Versuche Bezug nehmen zu können, auf dieselbe Weise untersucht.

Leider beeinträchtigt das Fehlen des Vergleiches der Formeln mit den Ergebnissen ausgeführter Versuche wesentlich den Wert des vorliegenden Heftes, dem am Ende eine übersichtliche Zusammenstellung der erhaltenen Formeln beigegeben ist; an Lesbarkeit und Uebersichtlichkeit erfüllt es jedoch die eingangs an derartige Darstellungen gestellten Forderungen im weitem Ausmaße.

Von Druckfehlern sind mir bei der Durchsicht folgende Stellen aufgefallen:

S. 11 Z. 3 v. u. soll heißen

$$\frac{\varrho_a^2}{2} - \frac{\varrho_i^2}{2} = (\varrho_a - \varrho_i)\frac{\varrho_a + \varrho_i}{2} = s_a\,\varrho_m.$$

S. 46 in Z. 2 v. o. soll es heißen

$F_i / F_a = 0{,}444$.

Die Uebersicht in § 2 ist nicht klar, z. B. bezügl. IV., da die Schubspannungen in I doch ebenfalls senkrecht zur $z$-Achse sind. In Seite 10, 3. Absatz wäre auf den Fall hinzuweisen, daß die innere Spannungslinie auch aus mehreren Punkten bestehen kann, ein Fall, der gerade für zusammengesetzte Querschnitte von Bedeutung ist.

Prag, April 1922. Pöschl. 179

Dr.-Ing. GEORG **WELTER**, Elastizität und Festigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 230.

Die fortwährend wachsenden Anforderungen, die von der Technik an die Güte der Konstruktionsmaterialien gestellt werden, erfordern immer wieder neue Versuchsreihen über die Festigkeit der verschiedenen, in der Praxis gebrauchten Materialien. Die Untersuchung über den Einfluß der Temperatur auf die Festigkeitseigenschaften von Spezialstählen bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Nach Ueberwindung großer versuchstechnischer Schwierigkeiten ist es dem Verfasser gelungen, einen Apparat zu bauen, mit dem er eine Reihe neuer, für die Beurteilung der untersuchten Stähle wichtiger Versuche anstellen konnte. So wurden für die verschiedenen Stahlsorten die bisher noch nicht bekannten bleibenden Dehnungen sowie die Elastizitätsgrenze nicht nur bei Zimmertemperatur, sondern auch bei höheren Temperaturen bestimmt. Es zeigte sich dabei, daß die Festigkeit der Kohlenstoffstähle bei etwa 200° auf einen Höchstwert steigt, der erheblich über der Festigkeit bei Zimmertemperatur liegt. Bei noch höherer Temperatur wird die Fließgrenze um so eher erreicht, je höher die Temperatur ist. Der Einfluß des Mangangehaltes bei hohen Temperaturen auf die Dehnbarkeit und die Festigkeit der Kohlenstoffstähle ist gering. Von den Spezialstählen, die untersucht worden sind und die zumeist die gleichen Eigenschaften wie die Kohlenstoffstähle aufweisen, verdient die Beobachtung, daß die Chrom-Wolfram-Stähle bis 400° annähernd die gleiche Festigkeit behalten, besondere Beachtung. Die Arbeit verdient als einer von den vielen Grundpfeilern, die das Gebäude der Festigkeitslehre tragen, Anerkennung und sie weckt zugleich den Wunsch nach weiteren Versuchsreihen, die von anderen Gesichtspunkten aus die Materialgüte von Spezialstählen untersuchen. L. Föppl. 168

Dr. JOSEF **GEITLER**, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Zweite vermehrte Auflage. Braunschweig 1921 (Sammlung Wissenschaft).

Nach einem einleitenden Kapitel über die Fernwirkungstheorien, wie sie sich im Anschluß an Newton, aber wohl entgegen dessen eigenen tieferen Ansichten, gebildet haben, behandelt das Buch die Theorie der vermittelten Fernwirkungen bis zu ihrer praktischen Entwicklung, der drahtlosen Telegraphie. In klarer Form werden die Gedanken von Faraday, Maxwell, Hertz und dessen klassische Experimente dargestellt. Die nächsten Abschnitte sind im wesentlichen der Theorie der Strahlung gewidmet, wie sie im Anschluß an Maxwell und Hertz ausgebaut wurde. Die Zusammenhänge zwischen der elektromagnetischen und der optischen Strahlung, die Ausbreitung der Strahlung mit Rücksicht auf Form und Lage des Erregers, sowie insbesondere der Einfluß von führenden Drähten und leitenden Ebenen werden besprochen. Der letzte Abschnitt endlich stellt die weiteren großen Schritte dar, die noch zu überwinden waren, bis aus der wissenschaftlichen Erkenntnis die technische Durchführung der drahtlosen Telegraphie entstand, die hauptsächlich aus der Auffindung der Vorteile vertikalstehender Antennen und der Herstellung schwach gedämpfter elektrischer Schwingungen ihren Anstoß empfing. Das Buch führt so bis zur neuesten Entwicklung, die durch die Verwendung der Elektronenröhren gekennzeichnet ist.

Es gehört zu den erfreulichen Erscheinungen, die überall die klare Entwicklung theoretischer Auffassungen erkennen lassen, ohne dabei etwa mit mathematischen Darstellungen belastet zu sein, deren wesentliche Züge jeder Fachmann dennoch daraus erkennen kann. Es kann daher sowohl für den mit den physikalischen Grundlagen vertrauten Theoretiker, als auch den reinen Physiker und den theoretisch interessierten Techniker als kurze Einführung in das Gebiet der elektromagnetischen Schwingungen empfohlen werden.

F. Noether. 152

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. Prof. der reinen Mathematik a. d. Techn. Hochsch. Dresden. Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Uebungsbuch für Studierende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung. 2. Auflage. Mit 109 Fig. im Text. Leipzig 1921. 312 S.

Wie aus dem Untertitel hervorgeht, deckt sich das Buch inhaltlich im Wesentlichen mit üblichen Lehrbüchern der Differential- und

Integralrechnung. Der Verfasser bestrebt sich dabei durch anschauliche Behandlung dem Leser die Ueberwindung der begrifflichen Schwierigkeiten zu erleichtern, die ihm das Eindringen in die strengen Methoden des Gebietes zu erschweren pflegen.

Man wird allen den Beurteilern und Lesern der ersten Auflage Recht geben dürfen, die in diesem Buche eine pädagogische Meisterleistung erblicken, die dem Anfänger durch eingestreute historische Angaben über manche Schwierigkeit spielend hinweg hilft. Nach dem biogenetischen Grundgesetz muß ja eine historische Behandlung am ehesten all den Schwierigkeiten gerecht werden, die sich auch vor dem Anfänger auftürmen. Zum Vorwurf aber möchte ich es dem Verf. machen, daß er sich durch M. Cantors bekannte Exzerptensammlung »Geschichte der Mathematik« (4 Bde. Leipzig, Teubner) hat verleiten lassen, mit seinen historischen Bemerkungen im achtzehnten Jahrhundert stecken zu bleiben. Denn recht spärlich nur sind des Verf. historische Bemerkungen aus dem neunzehnten Jahrhundert. Bedenkt man aber, daß dies gerade das kritische Jahrhundert der begrifflichen Fassung des vorher mehr Geahnten und Geschauten als Erkannten war, so wird man darin doch einen Mangel erblicken müssen, dessen Beseitigung in einer späteren Auflage das Buch in seinem Wert noch erheblich steigern könnte. Gerade so schwierige Begriffsbildungen, wie die gleichmäßige Stetigkeit bedürfen durchaus der Belebung und es sollte vermieden werden, im Leser einen so schiefen Eindruck zu erwecken, als ob Cauchy damit schon im Reinen gewesen wäre. Die Erzeugung beliebiger Summenwerte durch Umordnung der Glieder einer bedingt konvergenten Reihe sowie die Summierung durch arithmetische Mittel hätte Gelegenheit geboten, dem Leser zu zeigen, daß es im neunzehnten Jahrhundert auch nach Gauß und außer Weierstrass, Seidel und Mertens noch bedeutende Leute gegeben hat. Und wenn man Mertens bei dem Cauchyschen Multiplikationssatz erwähnt, so hätte es doch angesichts des Beispiels von S. 83 nahe gelegen, auch des Abelschen Multiplikationssatzes zu gedenken. Sind auch des Verf. Anmerkungen aus alten Jahrhunderten sehr sorgfältig, so wird es doch der angewandte Mathematiker vermissen, daß die Kenntnisse, die doch damals jeder von den Anwendungen besaß, und der Einfluß, den solche Kenntnis auf die Entwicklung der Mathematik hatte, in des Verf. Darstellung so wenig zur Geltung kommt. So könnte man sich überhaupt denken, daß die historischen Bemerkungen enger mit dem Wesen der Darstellung verwoben würden, statt nur so als Mäntelchen die Darstellung vor allzu frostiger Begriffskälte zu schützen. So glaube ich, daß des Verf. Absicht in der Durchführung noch mancher Steigerung fähig sein könnte, die das an sich schon so schöne Buch zu einem noch weit schöneren gestalten müßte.

Bieberbach. 176

W. **LIETZMANN,** Direktor der Oberrealschule in Göttingen. Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen. (Philosophisch-pädagogische Bibliothek, Bd. 9.) Charlottenburg, Mundus Verlagsanstalt 1921. 68 S.

Der bekannte Verfasser gibt hier eine angenehm lesbare Darstellung derjenigen logischen und erkenntnistheoretischen Lehren, die sich nach seinen eigenen Erfahrungen zwanglos dem mathematischen Unterricht auf den höheren Klassen einfügen lassen. Um solche Ziele zu erreichen, ist im Rahmen des Unterrichtes nur etwas kritischer Geist nötig, ein wenig Reflektieren darüber, was eigentlich die Methode der Mathematik ist. Leicht wird man hieran den Schülern Aufklärung über die logische Lehre vom Schließen geben können. Das Studium naheliegender Trugschlüsse gibt Gelegenheit, die Rolle von Anschauung und Denken gegeneinander abzugrenzen und ermöglicht es so, den Wert exakten Denkens im Allgemeinen herausstellen zu können. Der geometrische Unterricht gibt weiteren Anlaß, Mathematik und Wirklichkeit in Beziehung zu setzen. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, — namentlich dann, wenn der Physikunterricht mit dem mathematischen Hand in Hand geht —, das Wesen einer naturwissenschaftlichen Theorie herauszuarbeiten, und damit ist man ja mitten in der Erkenntnistheorie. So rechtfertigt die Schrift die Meinung derer, die ein Hineinarbeiten philosophischer Unterweisung in den Unterricht der einzelnen Fächer einem besonderen philosophischen Unterricht vorziehen. Denn tatsächlich ist ja Philosophie ohne positives Wissen ein Unding. Die Schrift gibt damit auch denjenigen Recht, die aus dieser Auffassung heraus verlangen, daß jeder künftige Lehrer der Mathematik auch über die Stellung seiner Wissenschaft zur Philosophie einige Klarheit besitze. Besonderen erzieherischen Wert hat es, solche Art Philosophie zu treiben, namentlich auch in unserer heutigen Zeit, wo der Wert nüchternen Denkens nicht eben hoch im Kurse steht, in einer Zeit, die gar zu oft Phantasie und Wirklichkeit verwechselt. Bieberbach. 197

Dr. R. **v. MISES,** Professor an der Universität Berlin. Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 113 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. VII + 210. (Selbstanzeige).

Das jetzt in zweiter Auflage vorliegende Buch wendet sich an alle, »die aus Beruf oder Neigung die mechanischen Grundlagen kennen zu lernen wünschen, auf denen unser heutiges Flugwesen ruht, ohne dabei in technischen Dingen über mehr als gute Schulbildung zu verfügen. Es sind daher alle Ueberlegungen und Untersuchungen fortgeblieben, zu deren Durchführung höhere mathematische Hilfsmittel erforderlich wären. Dem Ingenieur, der sich der Flugtechnik zuwenden

will, mag das Buch als erste Einführung dienen, dem Flieger oder dem im Flugdienst tätigen Praktiker als theoretische Ergänzung zu selbstgewonnenen Anschauungen und Erfahrungen.«

Nach einem kurzen geschichtlichen Ueberblick behandeln die einzelnen Kapitel: I. Allgemeines über Luftkräfte, Luftwiderstand. — II. Die Tragfläche. — III. Die Luftschraube. — IV. Der Motor. — V. Zusammenwirken von Tragfläche, Luftschraube und Motor. — VI. Steuerung, Stabilität und Stabilisierung. — VII. Abflug, Landung, Navigation.

Der ersten Auflage (1918) gegenüber ist das Buch vermehrt durch die Aufnahme neuerer Versuchsergebnisse soowie verschiedener Angaben, deren Veröffentlichung während des Krieges untunlich war. Mises. 212

Dr. L. **SCHILLER,** Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. (Leipziger Habilitationsarbeit.) Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 248. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1922. 36 S.

Der Inhalt dieses Forschungsheftes unterscheidet sich von dem der beiden Aufsätze in dieser Zeitschrift (Bd. 1 1921 S. 436—444, Bd. 2 1922 S. 96—106) durch einige etwas weitergehende Ausführungen und genaue Angaben über die Versuchseinrichtung und die einzelnen Versuchsergebnisse. Wer für die moderne experimentelle Forschung in der Hydromechanik Interesse besitzt, wird mit Vorteil die eingehendere Darstellung benutzen.

Mises. 219

# NACHRICHTEN

**Max Abraham †.** Am 16. November d. Js. verschied in München an den Folgen eines schweren Leidens Prof. Dr. Max Abraham, dessen letzte wissenschaftliche Arbeit in dieser Zeitschrift veröffentlicht worden ist[1]. Abraham, der 1875 in Danzig geboren wurde, promovierte in Berlin 1897 und war 1900—1909 Privatdozent an der Universität Göttingen. Einen Teil dieser Zeit hindurch war er von Göttingen beurlaubt und lehrte an einer amerikanischen Universität. Im Jahre 1909 wurde er Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Mailand und verlor diese Stelle erst beim Eintritt Italiens in den Krieg gegen Deutschland. Einem weiteren Kreis von Ingenieuren ist Abraham hauptsächlich durch das, ursprünglich gemeinsam mit A. Föppl verfaßte, weit verbreitete Lehrbuch der Elektrizitätslehre bekannt. Seine wissenschaftlichen Arbeiten, die ihm einen bleibenden Namen in der Geschichte der Physik gesichert haben, erstreckten sich auf verschiedene Gebiete der Elektrizitätstheorie und der Optik.

**Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung.** Der vorläufige Ausschuß hat beschlossen, daß die Vereinigung bis zur endgültigen Annahme der Satzungen den Doppelnamen führen soll »Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung—Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik«. Der vorläufige Beitrag für das erste Jahr ist von 50 ℳ auf 150 ℳ erhöht worden. Die bisherigen Mitglieder werden dringend gebeten, die Restzahlung von 100 ℳ möglichst umgehend auf das Postscheckkonto des Geschäftsführers Prof. v. Mises, Berlin 142813 zu leisten. Anmeldungen neuer Mitglieder werden vom Geschäftsführer sowie vom Vorsitzenden und jedem Ausschußmitglied entgegengenommen.

**Technisch - Wissenschaftliches Vortragswesen Berlin.** Im laufenden Winter werden eine größere Reihe von Vorträgen und von Kursen veranstaltet, von denen wir die folgenden besonders hervorheben: Vorträge zur Schwingungslehre von Direktor W. Hahnemann-Kiel; Kurse über Mathematik und Mechanik von Prof. Dr. R. Fuchs-Charlottenburg, Dr. Rückle-Berlin; über Statik und Dynamik von Prof. Dr. M. Weber-Charlottenburg; über Schwingungslehre von demselben; über konforme Abbildung und ihre Anwendung von Prof. Wallenberg-Charlottenburg; über Wärmelehre von Dipl.-Ing. Tannenbaum AEG. Berlin. Nähere Auskünfte darüber erteilt die Geschäftsstelle des TWV im Ingenieurhaus Berlin. 213

**Universitäts-Vorlesungen aus der angewandten Mathematik.** Eine Uebersicht der im laufenden Wintersemester an den 23 deutschen Universitäten angekündigten Vorlesungen und Uebungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik wird dem Leser aus manchen Gründen von Interesse sein. In der folgenden Zusammenstellung ist die angewandte Mathematik nur im engsten Sinne berücksichtigt. Nicht aufgenommen wurden zur Physik (auch technischen Physik) gehörende Vorlesungen, ebensowenig Astronomie, Geodäsie, Meteorologie usw.; Mechanik nur, soweit sie von Mathematikern gelesen wird. (3 V., 1 Ü. bedeutet 3 Stunden Vorlesungen, 1 Stunde Uebungen.)

Berlin. Darstellende Geometrie. 4 V. v. Mises.
Geometrische Konstruktionen. 2 V. v. Mises.
Seminar über Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2 Ü. v. Mises.
Mathematisches Praktikum für Anfänger II. 3 Ü. v. Mises.
Statistische Methoden der Naturwissenschaft. 1 V. Ad. Schmidt.
Seminar für wissenschaftliches Rechnen. 2 Ü. F. Cohn.

Bonn. Axonometrie und Perspektive. 2 V. Beck.

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 109 bis 131.

Zeichnerische Methoden der technischen Mechanik, insbesondere graphische Statik. 2 V. Ruhm.

Breslau. —

Erlangen. Darstellende Geometrie II. 4 V., 2 Ü. Bilz.
Politische Arithmetik. 2 V. Bilz.

Frankfurt. Graphische und numerische Methoden. 2 V., 2 Ü. Reinhardt.
Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3 V. Brendel.

Freiburg. Mathematik des Geldverkehrs. 1 V. Loewy.
Darstellende Geometrie I. 2 V., 2 Ü. Seith.
Graphische Statik. 2 V. Ansel.

Gießen. Graphische Statik. 2 V., 1 Ü. Falckenberg.
Numerische und graphische Analysis. 3 V., 1 Ü. Maennchen.

Göttingen. Darstellende Geometrie II. 3 V., 2 Ü. König.
Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik. 3 V., 2 Ü. Bernstein.
Versicherungsrechnung mit schriftlichen Uebungen. 2 V. Bernstein.
Ausgewählte Fragen der angewandten Mathematik. 2 V. Runge und König.
Mechanik der Kontinua. 4 V. Prandtl.
Anleitung zum selbständigen Arbeiten. Täglich. Prandtl.

Greifswald. Mechanik schwimmender Körper (Theorie des Schiffes). 2 V. Vahlen.
Darstellende Geometrie mit Uebungen. 4 Std. Thaer.

Halle. Graphische und numerische Methoden der angewandten Mathematik. 4 V., 2 Ü. Doetsch.
Versicherungsmathematik. 2 V., 1 Ü. Doetsch.

Hamburg. Mechanik der Kontinua. 4 V., 1 Ü. Ostrowski.
Seminar über höhere Mechanik. 2 Ü. Ostrowski.
Versicherungswissenschaftliche Uebungen. 2 Ü. Bruck, Riebesell, Sieveking.

Heidelberg. Politische Arithmetik einschl. Versicherungswesen. 2 V. Bopp.

Jena. Technische Mechanik II. 4 V. Winkelmann.
Graphische Methoden und graphisches Rechnen. 2 V., 1 Ü. Winkelmann.
Uebungen in angewandter Mathematik für Fortgeschrittene. 2 Std. Winkelmann.
Analytische Mechanik. 3 V., 1 Ü. Koebe.

Kiel. Graphische und numerische Methoden. 4 V. Neuendorff.
Einleitung in die mathematische Statistik. 2 V., 2. Ü. Wirtz.
Vorträge und Uebungen aus der angewandten Mathematik. 2 Std., 14tägig. Wirtz.

Köln. Politische Arithmetik. 2 V. Druxes.
Versicherungsmathematik. 1 V. Druxes.

Königsberg. Versicherungsmathematik mit Uebungen. 5 Std. Kalusa.

Leipzig. Mechanik. 5 V. Schnee.
Uebungen zur darstellenden Geometrie. 2 Ü. Lichtenstein.

Marburg. Graphische Methoden und numerisches Rechnen. 2 Ü. von Dalwigk.

München. Darstellende Geometrie II. 4 V., 3 Ü. Hartogs.
Versicherungswissenschaftliche Uebungen. 2 Std. Böhm.

Münster. Einführung in die Versicherungsmathematik. 2 V. Daniel.
Graphische Methoden. 2 V., 2 Ü. Geilen.
Graphische Statik mit Uebungen. 3 Std. Schewior.

Rostock. Mechanik. 4 V. Pohlhausen.
Numerisches und graphisches Rechnen. 2 V. Pohlhausen.
Mechanische Grundlagen des Segelfluges. 2 V. Pohlhausen.

Tübingen. —

Würzburg. —

Doetsch.

# ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

**Ueber Umsteuerungen.** Zu dem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz von Hrn. W. Jung, »Ueber Umsteuerungen« (Bd. 1, 1921, S. 455 bis 463), möchte ich in einigen Punkten Stellung nehmen.

Was die Beschleunigungskonstruktionen anbelangt, so sei darauf hingewiesen, daß M. Grübler in seinem 1917 erschienenen Buche »Getriebelehre« ganz allgemeine Konstruktionen für die Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen angegeben hat. Allerdings ist die Dissertation von W. Jung, die seinem Aufsatz zugrund eliegt, bereits 1913 veröffentlicht worden.

Ferner möchte ich auf die Zwangläufigkeitsbetrachtungen des Verfassers etwas eingehen. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen sind zwar nicht falsch, doch ist ihre Schlußweise zu beanstanden, was mir insbesondere deshalb wesentlich erscheint, weil die Zwanglauftheorie völlig streng behandelt und zu einfachen, durchsichtigen Ergebnissen geführt worden ist[1]).

---

[1]) Vergl. hierüber M. Grübler, Allgem. Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinemat. Ketten, »Civilingenieur« 1883, S. 167 bis 200, und Verhandl. des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes in Preußen 1885, S. 179 bis 223. — Ferner L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, Abschn. 183, S. 423, und A. Schoenflies u. M. Grübler, Kinematik, Encykl. d. math. Wissenschaften. Bd. IV, 1. Teilband, S. 267 bis 273.

Diese Ergebnisse bestehen im wesentlichen darin, daß die Zwangläufigkeit der kinematischen Ketten unabhängig von den Abmessungen der einzelnen Glieder ist und daß sich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zwangläufigkeit durch eine einzige ganzzahlige Beziehung zwischen der Zahl der Glieder und der der Elementenpaare ausdrücken läßt. Diese Beziehung hat bei den Mechanismen, bei denen nur niedere Elementenpaare (Gelenke und Schiebepaare) auftreten und um die es sich in der Arbeit von W. Jung ausschließlich handelt, die Form

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

wobei $g$ die Zahl der niederen Elementenpaare und $n$ die der Glieder bedeutet. Man erkennt sofort, daß z. B. die von W. Jung behandelte Baker-Pilliod-Steuerung, bei der $n = 14$ und $g = 19$ ist, die obige Bedingung erfüllt und daher zwangläufig ist. Die angegebene Bedingungsgleichung liefert ein strenges und dabei viel einfacheres Kriterium für die Zwangläufigkeit als die entsprechenden Betrachtungen von W. Jung, auf die ich noch in zwei Punkten eingehen will. Wenn man den Mechanismus, dessen Zwangläufigkeit untersucht werden soll, durch Vertauschung oder sonstige Veränderung von Gliedern in einen anderen überführt, so müßte man, wenn die Schlußweise streng sein soll, zunächst nachweisen, daß durch diese Veränderung die Zwangläufigkeit nicht beeinträchtigt wird. Der zweite Punkt betrifft die sogenannten imaginären Gelenke, unter denen in der Arbeit von W. Jung die Pole der Bewegung verstanden werden und auf die ich unten noch einmal zu sprechen komme. Sind bei einem Mechanismus die Pole der gegenseitigen Bewegung der Glieder bekannt, so ist damit die Zwangläufigkeit schon gewährleistet; denn durch die Pole sind die gegenseitigen Bewegungen aller Glieder völlig bestimmt. Wenn man bei einem Mechanismus, dessen Pole bekannt sind, vier beliebige Glieder herausgreift und diese als eine Vierzylinderkette mit ganz oder teilweise imaginären Gelenken anspricht, um daraus Schlüsse über die Zwangläufigkeit zu ziehen, so sucht man etwas zu beweisen, was schon in der Voraussetzung enthalten ist.

Zum Schluß will ich noch auf einen Punkt eingehen, der mehr formaler Natur und daher weniger wichtig ist, nämlich auf die bereits erwähnten imaginären Gelenke, einen Ausdruck, den W. Jung mitunter für die Pole je zweier Glieder verwendet. Die Einführung der imaginären Gelenke in die Kinematik ist nach den vorstehenden Ausführungen jedenfalls nicht notwendig; sie ist im Gegenteil meines Erachtens begrifflich zu beanstanden, da das Gelenk gegenüber dem allgemeineren Begriffe des Poles der Bewegung durch die wesentliche Eigenschaft gekennzeichnet ist, daß es während der ganzen Dauer der Bewegung seine Lage in den beiden Gliedern, die es verbindet, nicht ändert. Die Gelenke sind kinematisch als spezielle Pole anzusprechen, und es erscheint mir daher nicht gerechtfertigt, die Pole als »imaginäre« Gelenke zu bezeichnen und diesen die wirklichen Gelenke als »reelle« Gelenke gegenüberzustellen.

Dresden. H. Alt. 172

* * *

Herr W. Jung erwidert auf die Bemerkungen von Hrn. H. Alt folgendes:

Das allgemeine Verfahren der Auflösung bei der Untersuchung einer Zwangläufigkeit führt stets zu richtigen Ergebnissen, wenn es auch die von der Kritik verpönte Anschaulichkeit hat, die einer »streng« aufgebauten Theorie abgeht. Prof. Rob. Land, sicher ein ausgezeichneter Forscher, sagt: »Bei der Lösung vieler, bisher schwieriger technisch-wissenschaftlicher Aufgaben kommt es weniger auf große mathematische Kenntnisse an, als auf sachliche Vertiefung bei möglichst anschaulicher Darstellung des Gegenstandes unter Benutzung einfacher elementarer Hilfsmittel.«

Daß nur der Gebrauch der reellen, nicht aber der imaginären Gelenke erlaubt sein soll, ist ein persönliches Dogma, welches sich ebenfalls gegen die Anschauung richtet. Durch diese Richtung allein ist es wissenschaftlich nicht zu begründen. 172a

**Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte** (Nachtrag). Durch Herrn Ober-Ing. Heinrich Holzer in Nürnberg bin ich auf dessen Arbeit »Platten mit veränderlicher Dicke und günstige Formen solcher Platten« in der Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1918 aufmerksam gemacht worden, worin die kreisförmige Platte von veränderlicher Dicke bereits behandelt ist. Insbesondere ist das in meinem Aufsatz »Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte«, Band 2 dieser Zeitschrift, S. 92—96, betrachtete Beispiel einer Platte von veränderlicher Dicke unter konstantem Druck in der genannten Arbeit von Hrn. Holzer schon durchgeführt worden. Der wesentliche Inhalt meines Aufsatzes, nämlich die Durchführung der Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte wird jedoch durch die Arbeit von Hrn. Holzer nicht berührt.

Ferner hat mich Hr. Alexander Fischer, Göding, auf eine von ihm verfaßte, mir bisher nicht bekannt gewesene Abhandlung »Beitrag zur genauen Berechnung der Dampfturbinenscheibenräder mit veränderlicher Dicke« (Zeitschr. österr. Ing.- u. Arch.-Verein 1922) hingewiesen; auch durch diese wird der eigentliche Inhalt meiner Veröffentlichung nicht berührt.

L. Föppl, München. 190

(Redaktionsschluß 28. Dezember 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.


ZEISS
Punktal=
Gläser
CARL ZEISS
JENA